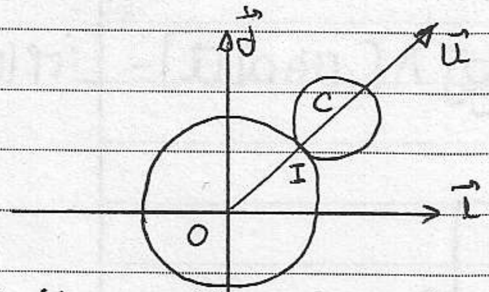
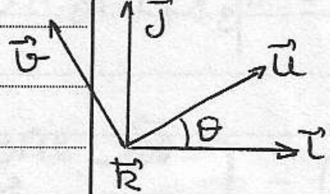
Exercice 7

Dans le repère orthonormé direct $R_0(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le système Σ constitué de deux solides homogènes S_1 et S_2 de même masse M. S_1 est un disque de rayon R et de centre O. S_2 est un disque de rayon a et de centre en C. Les deux disques restent en contact en un point I du plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On désigne par $\vec{u}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{OC} = (R+a)\,\vec{u}$ et on note $\vec{v}$ le vecteur tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ soit orthonormé direct. (cf figure ci dessous)

Le système Σ est soumis à la gravité $-g\,\vec{\jmath}$.
S_1 est relié au batî par une liaison pivot parfaite d'axe $O\vec{k}$
S_1 exerce sur S_2 une force $\vec{F} = -k\,Mg\,\vec{u}$ au point C (k est une constante positive).
Et enfin, on note $N\,\vec{u} + T\,\vec{v}$ la réaction de S_1 sur S_2 au point I. Le contact au point I a lieu suivant une loi de Coulomb de coefficient f

Etudier l'équilibre du système





On introduit θ l'angle entre $\vec{\imath}$ et $\vec{u}$ mesuré autour de $\vec{k}$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_{eff}(S_1)=0 \\ \tau_{eff}(S_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_{eff}(\Sigma)=0 \\ \tau_{eff}(S_1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_{eff}(\Sigma)=0 \\ \tau_{eff}(S_2)=0 \end{cases}$$

$$\tau_{eff}(S_1) = \begin{bmatrix} -Mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} \vec{R_O} \\ \vec{M}(O) \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} -N\vec{u}-T\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} kMg\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_C \quad \mathcal{M}(O).\vec{k} =$$

En fait $\vec{\mathcal{M}}(O)=0$ car le système est dans le plan et dans cas liaison sphérique $\simeq$ liaison pivot

$$\tau_{eff}(S_2) = \underset{1}{\begin{bmatrix} -Mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_C} + \underset{2}{\begin{bmatrix} N\vec{u}+T\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_I} + \underset{3}{\begin{bmatrix} kMg\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_C}$$

$$\tau_{eff}(\Sigma) = \underset{1'}{\begin{bmatrix} -Mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_O} + \underset{2'}{\begin{bmatrix} \vec{R_O} \\ 0 \end{bmatrix}_O} + \underset{3'}{\begin{bmatrix} -Mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_C}$$

On va exploiter $\tau_{eff}(\Sigma)$ au point O et $\tau_{eff}(S_2)$ au point C pour d'évidentes raisons de simplicité

$\vec{\mathcal{M}}_1(C) = \vec{\mathcal{M}}_3(C) = 0$
$\vec{\mathcal{M}}_2(C) = \vec{\mathcal{M}}_2(I) + \vec{R}_2 \wedge \vec{IC} = (N\vec{u} + T\vec{v}) \wedge a\vec{u} = -aT\vec{k}$

La résultante d'un torseur est unique elle ne dépend pas du point choisi pour le calcul. Il suffit d'en additionner chacun des éléments

$$\mathcal{T}_{eff}(S_2) = \begin{bmatrix} (N + kmg - mg\sin\theta)\vec{u} + (T - mg\cos\theta)\vec{v} \\ -aT\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

$\mathcal{M}'_1(O) = \mathcal{M}'_2(O) = 0$
$\mathcal{M}'_3(O) = \mathcal{M}^3_3(C) + \vec{R}_3 \wedge \vec{CO} = -mg\vec{j} \wedge [-(R+a)\vec{u}] = -m(R+a)g\cos\theta\,\vec{k}$

alors
$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} \vec{R}_0 - 2mg\vec{j} \\ -m(R+a)g\cos\theta\,\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

$$\Sigma \text{ équilibre} \iff \left\| \begin{array}{l} \vec{R}_0 = 2mg\vec{j} \\ \cos\theta = 0 \\ N + kmg - mg\sin\theta = 0 \\ T = mg\cos\theta \\ T = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} \theta = \pm\pi/2 \\ T = 0 \\ N = (\pm 1 - k)mg \end{array} \right.$$

(i) (ii)

Rem : On a perdu l'équivalence logique en passant de (i) à (ii) car on a laissé tombé la réaction de la liaison pivot qui ne nous intéresse que très moyennement.
La condition de contact unilatéral impose $N > 0$
alors $\pm 1 - k > 0$. Le fait que $k > 0$ oblige
$\theta = \pi/2$ et $k < 1$

ainsi Σ équilibre $\Rightarrow \begin{cases} T = 0 \\ N = (1-k)mg \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$