IV. Equilibre de systèmes de solides

Exercice 1

Dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, avec $\vec{j}$ vertical ascendant, $\vec{g}=-g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère le système Σ constitué :

* d'un disque D homogène de masse m, de centre C et de rayon R.

* d'une barre S homogène de masse M, d'extrémités A et C et de longueur ℓ.

On suppose que le disque est astreint à rester en contact avec l'axe $O\vec{j}$ au point I, et que l'extrémité A de la barre reste sur l'axe $O\vec{i}$. On note $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AC}=\ell\vec{v}$, on intoduit $\vec{u}$ le vecteur tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ soit orthonormé directe et on note $\alpha=(\vec{i},\vec{u})$ (on suppose que $\alpha\in[0,\pi]$.

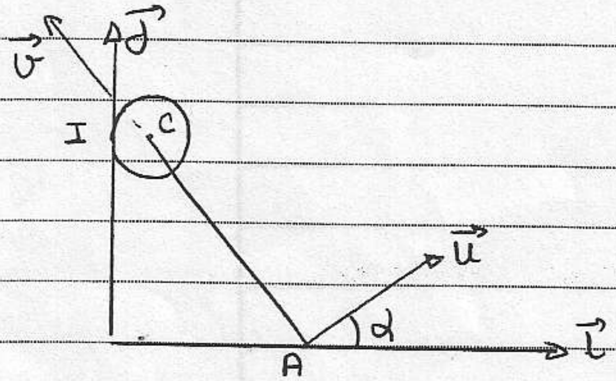
On suppose que la liaison entre le disque et la barre est une liaison pivot parfaite d'axe $C\vec{k}$.

On note $N\vec{i}+T\vec{j}$ la réaction du batî fixe sur D au point I, on note $Q\vec{i}+P\vec{j}$ la réaction du batît fixe sur S au point A et on suppose que la réaction $Q\vec{i}+P\vec{j}$ satisfait à une loi de Coulomb de coefficient f.

1. A quelle condition un système de solides est-il en équilibre ?

2. Ecrire les équations d'équilibre de Σ et en déduire la valeur de P,Q,N et T.

3. A l'aide de la loi de Coulomb exprimer α en fonction de f,M et m. On suppose que $f=\dfrac{2}{3}$ et que $M=2m$ déterminer la position d'équilibre de Σ.



Un système de solides est en équilibre lorsque chaque solide qui le constitue est en équilibre

$$\Sigma \text{ équilibre} \iff \begin{cases} \mathcal{T}eff(S)=0 \\ \mathcal{T}eff(D)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{T}eff(\Sigma)=0 \\ \mathcal{T}eff(S)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{T}eff(\Sigma)=0 \\ \mathcal{T}eff(D)=0 \end{cases}$$

On fait le bilan des efforts qui s'exercent sur S, sur D et sur Σ et on jugera après lesquels on exploitera. Les efforts qui s'exercent sur Σ sont souvent (mais pas toujours) intéressants car du fait du principe de l'action-réaction les efforts intérieurs vont se simplifier

$$\mathcal{T}eff(S)=\begin{bmatrix} -Mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_C} \\ \mathcal{M}(C) \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} Q\vec{i}+P\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad \text{avec } \vec{\mathcal{M}}(C)\cdot\vec{k}=0$$

en fait $\vec{\mathcal{M}}(C)=0$ car dans le plan les liaisons pivots se conduisent comme des liaisons sphériques

$$\mathcal{T}_{eff}(D) = \begin{bmatrix} \overset{1}{-mg\vec{j}} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} -\vec{R_c} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} \overset{2}{N\vec{i}+T\vec{j}} \\ 0 \end{bmatrix}_I$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \underset{1}{\begin{bmatrix} -Mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G} + \underset{2}{\begin{bmatrix} N\vec{i}+T\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_I} + \underset{3}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_C} + \underset{4}{\begin{bmatrix} Q\vec{i}+P\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A}$$

$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma)$ est intéressant pour 2 raisons

- R_c a disparu
- La résultante est exprimée sous une forme commode

On va aussi privilégier $\mathcal{T}_{eff}(D)$ car 2 élts sont déjà exprimés au C

Le point C est aussi adapté au calcul de $\mathcal{T}_{eff}(\Sigma)$

$$\vec{m}_1(C) = \vec{m}_2(C) = 0 \quad \vec{m}_3(C) = \vec{R_3} \wedge \vec{IC} = (N\vec{i} + T\vec{j}) \wedge R\vec{i} = -RT\vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(D) = \begin{bmatrix} -\vec{R_c} + N\vec{i} + (T-mg)\vec{j} \\ -RT\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

$$\vec{m}'_1(C) = \vec{m}'_1(G) + \vec{R}'_1 \wedge \vec{GC} = -Mg\vec{j} \wedge \frac{l}{2}\vec{v} = -\frac{Ml}{2} g \sin\alpha \vec{k}$$
$$\vec{m}'_2(C) = \vec{m}'_2(I) + \vec{R}'_2 \wedge \vec{IC} = (N\vec{i} + T\vec{j}) \wedge R\vec{i} = -RT\vec{k}$$
$$\vec{m}'_3(C) = 0$$
$$\vec{m}'_4(C) = (Q\vec{i} + P\vec{j}) \wedge l\vec{v} = l(Q\cos\alpha + P\sin\alpha)\vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} (N+Q)\vec{i} + (T+P-Mg-mg)\vec{j} \\ \left[lQ\cos\alpha + lP\sin\alpha - \frac{Ml}{2} g\sin\alpha - RT\right]\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

On déduit les équations ~~du mouve~~ d'équilibre

$$\begin{array}{l|l} (1) & \vec{R_c} = N\vec{i} + (T-mg)\vec{j} \\ (2) & T = 0 \\ (3) & N + Q = 0 \\ (4) & T + P = (M+m)g \\ (5) & lQ\cos\alpha + lP\sin\alpha - \frac{Ml}{2} g\sin\alpha - RT = 0 \end{array}$$

La première équation nous réjouit profondément car elle permet de calculer la réaction de la liaison pivot entre le disque et la barre si jamais on est tenté de le faire...

(2) $\Rightarrow T = 0$

(4) $\Rightarrow P = (M + m) g$

(5) $\Rightarrow Q\cos\alpha = \left(\frac{M}{2} g - P\right)\sin\alpha = -\left(\frac{M}{2} + m\right) g \sin\alpha$

$$Q = -\left(\frac{M}{2} + m\right) g \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

(3) $\Rightarrow N = \left(\frac{M}{2} + m\right) g \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

et $\vec{R_C} = \left(\frac{M}{2} + m\right) g \, tg\alpha \, \vec{\imath} + mg \, \vec{\jmath}$

3. En statique la loi de Coulomb stipule que $|Q| < fP$

La condition de contact unilatéral en I impose $N > 0$ et par conséquent $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$

Alors $|Q| = \left(\frac{M}{2} + m\right) g \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

sachant que $M = 2m$ on a $|Q| = 2mg \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $P = 3mg$

$|Q| < fP \Rightarrow 2mg \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < \frac{2}{3} * 3\,mg$ (car $f = \frac{2}{3}$)

$$tg\alpha < 1$$

Il y aura donc équilibre du système tant que $tg\alpha < 1$

soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}[$