Exercice 8

Soit $R_o(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère OND lié à la terre, l'axe $O\vec{j}$ étant vertical ascendant.
Un cerceau (S) homogène (centre C, rayon R, masse M) est posé verticalement sur l'axe $O\vec{i}$ (en restant dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$), on note I le point de contact entre S et $O\vec{i}$ et on pose :

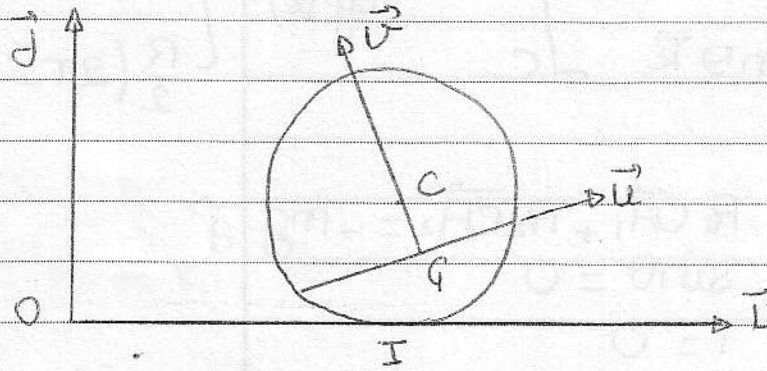
$$\overline{OI}=x \quad \text{et} \quad \alpha=(C\vec{i},C\vec{x}) \text{ où } C\vec{x} \text{ est un rayon lié à } S$$

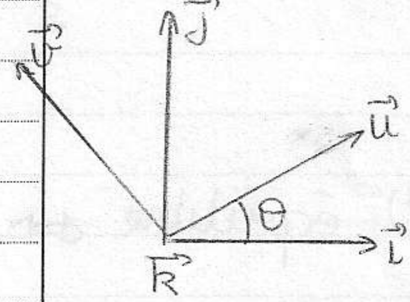
On note $T\vec{i}+N\vec{j}$ la réaction de l'axe $O\vec{i}$ au point I et on suppose que le contact de (S) avec l'axe $O\vec{i}$ satisfait à une loi de Coulomb de coefficient f

A l'intérieur de (S) se trouve une barre homogène (B) (masse M, centre G) de longueur $\sqrt{3}R$ et d'extrémités A_1 et A_2 telles que A_1 et A_2 restent toujours en contact avec (S).

(B) est mobile par rapport à (S) et on suppose que les contacts en A_1 et A_2 ont lieu **sans frottement**

On introduit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\overrightarrow{A_1A_2}=\sqrt{3}R\vec{u}$ et $\overrightarrow{GC}=\frac{R}{2}\vec{v}$ et on note $\theta=(\vec{i},\vec{u})$
Déterminer les positions d'équilibre du système Σ





Pour qu'un système de solides soit en équilibre, il faut que chaque solide du système soit en équilibre

$$\Sigma \text{ équil} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}_{eff}(S)=0 \\ \mathcal{T}_{eff}(B)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}_{eff}(B)=0 \\ \mathcal{T}_{eff}(\Sigma)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}_{eff}(S)=0 \\ \mathcal{T}_{eff}(\Sigma)=0 \end{cases}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(B)=\underset{(1)}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G}+\underset{(2)}{\begin{bmatrix} -R_1\overrightarrow{CA_1} \\ 0 \end{bmatrix}_{A_1}}+\underset{(3)}{\begin{bmatrix} -R_2\overrightarrow{CA_2} \\ 0 \end{bmatrix}_{A_2}}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(S)=\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_C+\begin{bmatrix} T\vec{i}+N\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_I+\begin{bmatrix} R_1\overrightarrow{CA_1} \\ 0 \end{bmatrix}_{A_1}+\begin{bmatrix} R_2\overrightarrow{CA_2} \\ 0 \end{bmatrix}_{A_2}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma)=\underset{(1')}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G}+\underset{(2')}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_C}+\underset{(3')}{\begin{bmatrix} T\vec{i}+N\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_I}$$

~~Cas~~ Dans le cas présent, il semble judicieux de s'intéresser aux $\mathcal{T}_{eff}(C, B)$ et $\mathcal{T}_{eff}(C, \Sigma)$

$$\mathcal{M}_1(C) = \mathcal{M}_1(G) - mg\vec{j}\wedge\vec{GC} = -mg\vec{j}\wedge\frac{R}{2}\vec{v} = -\frac{mR}{2}g\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\mathcal{M}_2(C) = \mathcal{M}_3(C) = 0 \quad \text{car} \quad \vec{A_iC}\,//\,R_i\vec{A_iC}$$

$$\mathcal{M}'_1(C) = \mathcal{M}_1(C) = -\frac{mR}{2}g\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\mathcal{M}'_2(C) = 0$$

$$\mathcal{M}'_3(C) = (T\vec{i}+N\vec{j})\wedge\vec{IC} = (T\vec{i}+N\vec{j})\wedge R\vec{j} = RT\vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(B) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} - R_1\vec{CA_1} - R_2\vec{CA_2} \\ -\frac{mR}{2}g\sin\theta\,\vec{k} \end{bmatrix}_C \qquad \mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} T\vec{i} + (N-2mg)\vec{j} \\ \frac{R}{2}(2T - mg\sin\theta)\vec{k} \end{bmatrix}$$

$$(\Sigma) \text{ équilibre} \iff \left\| \begin{array}{l} R_1\vec{CA_1} + R_2\vec{CA_2} = -mg\vec{j} \\ \sin\theta = 0 \\ T = 0 \\ N = 2mg \\ 2T = mg\sin\theta \end{array} \right.$$

Finalement, on a obtenu que le système BUS sera en équilibre lorsque

$$\theta = 0 \text{ ou } \pi$$
$$T = 0$$
$$N = 2mg$$

Feuille intercalaire N° ....