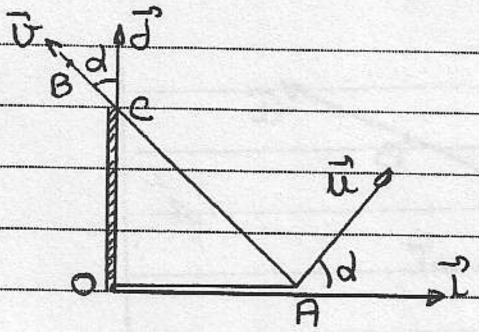
EXERCICE 5

Dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, avec $O\vec{j}$ vertical ascendant, $\vec{g} = g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère une barre S homogène de masse M, d'extrémités A et B et de longueur ℓ. Cette barre repose sur le sol au point A et est appuyée sur un mur vertical en un point C. On note h la hauteur du point C et α l'angle entre la verticale ascendante et la barre AB mesuré autour de $\vec{k}$.

L'extrémité A est maintenue par un fil $[OA]$ inextensible de masse négligeable

1. On suppose que le contact en A et en C a lieu sans frottement, déterminer les réactions en A, en C ainsi que la tension du fil lorsque la barre est en équilibre.

2. On suppose maintenant que le contact en A obéit à une loi de Coulomb de coefficient de frottement f, que que le contact en C a toujours lieu sans frottement. Déterminer une condition d'équilibre lorsque l'on supprime le fil.



On introduit $\vec v$ le vecteur unitaire tel que $\vec{AB} = \ell\vec v$ et $\vec u$; $(\vec u,\vec v,\vec k)$ soit orthonormée directe

$$\mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -Mg\vec j \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} N\vec j \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} N_c\vec u \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} T\vec i \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

réactions purement normale car ss frott^t — tension du fil

Exprimer ce torseur en A se justifie par le fait que 2 éléments sont déjà écrits en A

$\vec{\mathcal{M}}_1(A) = \vec{\mathcal{M}}_1(G) + \vec{R}_1 \wedge \vec{GA} = -Mg\vec j \wedge \left(-\frac{\ell}{2}\vec v\right) = \frac{M\ell}{2} g\sin\alpha\,\vec k$

$\mathcal{M}_2(A) = \mathcal{M}_4(A) = 0$

$\mathcal{M}_3(A) = N_c\vec u \wedge \vec{CA} = -N_c\vec u \wedge \frac{h}{\cos\alpha}\vec v = -\frac{hN_c}{\cos\alpha}\vec k$

Il vient

$$\mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} (T+N_c\cos\alpha)\vec i + (N - Mg + N_c\sin\alpha)\vec j \\ \left(\frac{M\ell}{2}g\sin\alpha - \frac{hN_c}{\cos\alpha}\right)\vec k \end{bmatrix}_A$$

$$\mathcal{B} \text{ équil} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} T + N_c\cos\alpha = 0 \\ N + N_c\sin\alpha = Mg \\ N_c = \frac{M\ell}{2h} g\sin\alpha\cos\alpha \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\| \begin{array}{l} N_c = \frac{M\ell}{2h} g\sin\alpha\cos\alpha \\ T = -\frac{M\ell}{2h} g\sin\alpha\cos^2\alpha \\ N = \left(1 - \frac{\ell}{2h}\sin^2\alpha\cos\right) Mg \end{array} \right.$$

2. Si on enlève le fil en ajoutant une condition de frottement en A on aura

$$|T| < fN$$

$$\frac{m\ell}{2R} g |\sin\alpha\cos^2\alpha| < f m g \left(1 - \frac{\ell}{2R}\sin^2\alpha\cos\alpha\right)$$

On peut raisonnablement restreindre l'étude de cet équilibre au cas où $\alpha \in [0, \pi/2]$, alors

$$\frac{\ell}{2R}\sin\alpha\cos^2\alpha < f\left(1 - \frac{\ell}{2R}\sin^2\alpha\cos\alpha\right)$$

Le coefficient de frottement doit alors être tel que

$$f > \frac{\ell\sin\alpha\cos^2\alpha}{2R - \ell\sin^2\alpha\cos\alpha}$$