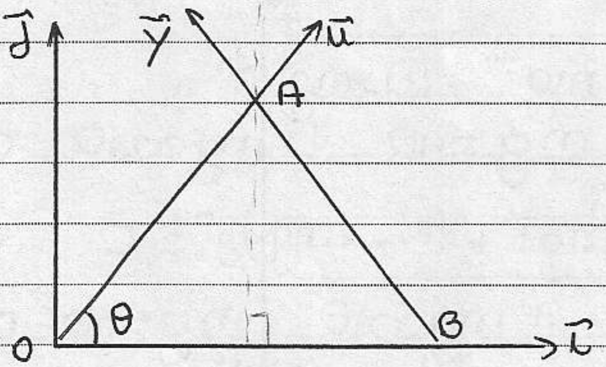
Exercice 4

Dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, avec $O\vec{j}$ vertical ascendant, $\vec{g} = -g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère un système Σ constitué de deux barres S_1 et S_2 homogènes de même masse m et de même longueur ℓ.
S_1 est d'extrémités O et A. On peut introduire $\vec{u}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{OA} = \ell\vec{u}$ et on note θ l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{u}$, (cf figure 1), on suppose $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

S_2 est d'extrémités A et B. On peut introduire $\vec{Y}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{BA} = \ell\vec{Y}$.

La liaison entre S_1 et le bâti fixe modélisé par le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une liaison pivot parfaite d'axe $O\vec{k}$.
Les deux barres sont articulées au point A par une liaison pivot parfaite d'axe $A\vec{k}$.
Le point B est astreint à rester en contact **sans frottement** avec l'axe $O\vec{i}$.

De plus, on exerce sur la barre S_2, au point B une force $-\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i}$.
Ecrire les torseurs des efforts qui s'exercent sur S_2 et sur Σ. En déduire la position d'équilibre de Σ.



$$\mathcal{T}_{eff}(S_2) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_2} + \begin{bmatrix} \vec{R}a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

système ds le plan

pas de frott^t

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_1} + \begin{bmatrix} \vec{R}_0 \\ 0 \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_2} + \begin{bmatrix} N\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

On exprime $\mathcal{T}_{eff}(S_2)$ au point A (à cause de la liaison pivot) et $\mathcal{T}_{eff}(\Sigma)$ au point O (pour la même raison).

$\mathcal{M}_1(A) = -mg\vec{j} \wedge \overrightarrow{G_2A} = -mg\vec{j} \wedge \frac{\ell}{2}\vec{Y} = +\frac{m\ell}{2}g\cos\theta\,\vec{k}$

$\mathcal{M}_2(A) = 0$

$\mathcal{M}_3(A) = N\vec{j} \wedge \overrightarrow{BA} = N\vec{j} \wedge \ell\vec{Y} = \ell N\cos\theta\,\vec{k}$

$\mathcal{M}_4(A) = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} \wedge \overrightarrow{BA} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} \wedge \ell\vec{Y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}m\ell g\sin\theta\,\vec{k}$

$$\mathcal{T}_{eff}(S_2) = \begin{bmatrix} \vec{R}a - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} + (N - mg)\vec{j} \\ \ell\left(N\cos\theta + \frac{m}{2}g\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\sin\theta\right)\vec{k} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} ⓑ \\ ⓒ \end{matrix}$$

Feuille intercalaire N° ....

$\overrightarrow{m'_1}(O) = -mg\vec{j} \wedge \overrightarrow{G_1O} = mg\vec{j} \wedge \frac{\ell}{2}\vec{u} = -\frac{m\ell g}{2}\cos\theta\,\vec{k}$

$\overrightarrow{m'_2}(O) = \vec{0}$

$\overrightarrow{m'_3}(O) = -mg\vec{j} \wedge \overrightarrow{G_2O} = -mg\vec{j} \wedge (\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{AO}) = -mg\vec{j} \wedge \frac{\ell}{2}(\vec{v} - 2\vec{u}) = -\frac{m\ell g}{2}(\cos\theta + 2\cos\theta)\vec{k}$

$= -\frac{m\ell g}{2}(3\cos\theta)\vec{k}$

$\overrightarrow{m'_4}(O) = (N\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i}) \wedge \overrightarrow{BO} = -(N\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i}) \wedge 2\ell\cos\theta\,\vec{i} = 2\ell N\cos\theta\,\vec{k}$

Alors $\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} \vec{R_O} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} + (N - 2mg)\vec{j} \\ \vec{k}\left[-\frac{m\ell g}{2}\cos\theta - \frac{m\ell g}{2}3\cos\theta + 2\ell N\cos\theta\right] \end{bmatrix}_O$

(Σ) à l'équilibre $\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{R_O} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} + (N-2mg)\vec{j} = \vec{0} \quad ⓐ \\ -2m\ell g\cos\theta + 2\ell N\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{N = mg}$

$\Downarrow$

on réinjecte le résultat ds $\mathcal{T}(S_2) = 0$

ⓒ $\xRightarrow{\text{soit}}$ $\ell\left(N\cos\theta - \frac{mg}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\sin\theta\right) = 0 \Rightarrow \frac{mg}{2}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) = 0$

On déduit $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$ (ou $\frac{7\pi}{6}$) mais $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

On pourrait alors calculer $\boxed{\vec{R_O} = +\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} + mg\vec{j}} \xLeftarrow[N=mg]{} ⓐ$

et $\boxed{\vec{R_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i}} \xLeftarrow[N=mg]{} ⓑ$