SUJET BLANC

Mécanique statique
TD Spécial 1

Nom
Prénom
Groupe

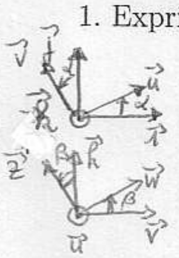
Exercice 1. Soient $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ et $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$, trois bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ telles que :
- $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ est déduite de $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par une rotation d'angle α mesurée autour de $\vec{k}$
- $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$, est déduite de $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ par une rotation d'angle β mesurée autour de $\vec{u}$

On considère le vecteur $\vec{U}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\vec{U} = p\vec{u} + q\vec{k} + r\vec{z}$

---

1. Exprimer le vecteur $\vec{U}$ dans la base B_o

2



$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$
$\vec{v} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$
$\vec{z} = \cos\beta\,\vec{k} - \sin\beta\,\vec{v}$
$= \cos\beta\,\vec{k} - \sin\beta(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$

$\Rightarrow \vec{U} = p\vec{u} + q\vec{k} + r\vec{z} = p\begin{vmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{vmatrix} + q\begin{vmatrix}0\\ 0\\ 1\end{vmatrix} + r\begin{vmatrix}\sin\alpha\sin\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\\ \cos\beta\end{vmatrix}$

$$\boxed{\vec{U} = (p\cos\alpha + r\sin\alpha\sin\beta)\,\vec{i} + (p\sin\alpha - r\cos\alpha\sin\beta)\,\vec{j} + (q + r\cos\beta)\,\vec{k}}$$

---

2. Calculer quand c'est possible :

1   1. $3\vec{w} \wedge 2\vec{k} = 6(\vec{w}\wedge\vec{k}) = \boxed{6\cos\beta\,\vec{u}}$

1   2. $\vec{v} \wedge \cos\beta\,\vec{w} = \cos\beta\,\vec{v}\wedge\vec{w} = \boxed{\cos\beta\sin\beta\,\vec{u}}$

1   3. $\vec{v} \wedge (\vec{u}\wedge\vec{i}) = \vec{v}\wedge(-\sin\alpha\,\vec{k}) = \boxed{-\sin\alpha\,\vec{u}}$

(1) 4. $\vec{k} \wedge (\vec{i}.\vec{z}) =$ Impossible ($\Leftarrow$ $\vec{i}.\vec{z}$ = scalaire)

(1) 5. $\|2\vec{u}+\vec{j}\|^2 = \|2\vec{u}\|^2 + \|\vec{j}\|^2 + 4\,\vec{u}.\vec{j} = 4+1+4\sin\alpha = \boxed{5+4\sin\alpha}$

(2) 6. $(\vec{u}+\vec{i}).(\vec{k}-\vec{z}) = (\vec{u}+\vec{i}).(\vec{k} - \cos\beta\,\vec{k} + \sin\beta\,\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{i}).(\sin\beta\,\vec{v} + (1-\cos\beta)\vec{k})$

$= \sin\beta\,\underbrace{\vec{u}.\vec{v}}_{0} + (1-\cos\beta)\underbrace{\vec{u}.\vec{k}}_{0} + \sin\beta\,\underbrace{\vec{i}.\vec{v}}_{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})} + (1-\cos\beta)\underbrace{\vec{i}.\vec{k}}_{0}$

$= \boxed{-\sin\beta\sin\alpha}$

==

(1) **2.** On se donne un torseur $\mathcal{T}$ défini par ses éléments de réduction en un point A par :

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}(A) \end{bmatrix}_A$$

Donner les éléments de réduction de $\mathcal{T}$ au point B en fonction de $\vec{\mathcal{M}}(A)$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}(B) \end{bmatrix}_B \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{\mathcal{M}}(B) = \vec{\mathcal{M}}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{R}}$$

SUJET ROSE

Mécanique statique
TD Spécial 1

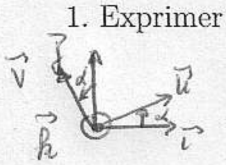
Nom
Prénom
Groupe

Exercice 1. Soient $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ et $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$, trois bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ telles que :
- $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ est déduite de $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par une rotation d'angle α mesurée autour de $\vec{k}$
- $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$, est déduite de $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ par une rotation d'angle β mesurée autour de $\vec{u}$

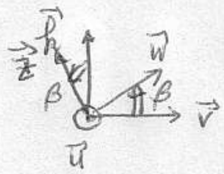
On considère le vecteur $\vec{U}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\vec{U} = p\vec{u} + q\vec{k} + r\vec{z}$

---

1. Exprimer le vecteur $\vec{U}$ dans la base B_1



(2)



$$\vec{z} = \cos\beta\,\vec{k} - \sin\beta\,\vec{v} \Rightarrow \vec{U} = \begin{vmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} 0 \\ -\sin\beta \\ \cos\beta \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{U} = p\vec{u} - r\sin\beta\,\vec{v} + (q + r\cos\beta)\,\vec{k}}$$

---

2. Calculer quand c'est possible :

(1) 1. $3\vec{w} \wedge 2\vec{k} = 6(\vec{w} \wedge \vec{k}) = \boxed{6\cos\beta\,\vec{u}}$

(1) 2. $\vec{v} \wedge \sin\beta\vec{z} = \sin\beta\,\vec{v} \wedge \vec{z} = \boxed{\sin\beta\cos\beta\,\vec{u}}$

(1) 3. $\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{i}) = \vec{v} \wedge (-\sin\alpha\,\vec{k}) = \boxed{-\sin\alpha\,\vec{u}}$

(1) 4. $\vec{u} \wedge (\vec{i}.\vec{z})$ = Impossible ($\Leftarrow \vec{i}.\vec{z}$ = scalaire)

(1) 5. $\|2\vec{u}+\vec{j}\|^2 = \|2\vec{u}\|^2 + \|\vec{j}\|^2 + 4\vec{u}\cdot\vec{j} = \boxed{5+4\sin\alpha}$

(2) 6. $(\vec{j}+\vec{v}).(\vec{k}-\vec{z}) = (\vec{j}+\vec{v})\cdot(\vec{k} - \cos\beta\,\vec{k} + \sin\beta\,\vec{v})$

$$= \underbrace{\vec{j}\cdot(1-\cos\beta)\vec{k}}_{0} + \sin\beta\,\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{v}}_{\cos\alpha} + (1-\cos\beta)\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{k}}_{0} + \sin\beta\,\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{1}$$

$$= \boxed{(1+\cos\alpha)\sin\beta}$$

===

(1) **2.** On se donne un torseur $\mathcal{T}$ défini par ses éléments de réduction en un point A par :
$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}(A) \end{bmatrix}_A$

Donner les éléments de réduction de $\mathcal{T}$ au point B en fonction de $\vec{\mathcal{M}}(A)$

$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(B) \end{bmatrix}_B$ avec $\boxed{\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{R}}$

SUJET VERT

Mécanique statique
TD Spécial 1

Nom
Prénom
Groupe

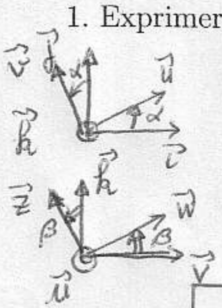
Exercice 1. Soient $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ et $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$, trois bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ telles que :
- $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ est déduite de $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par une rotation d'angle α mesurée autour de $\vec{k}$
- $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$, est déduite de $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ par une rotation d'angle β mesurée autour de $\vec{u}$

On considère le vecteur $\vec{U}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\vec{U} = p\vec{u} + q\vec{k} + r\vec{z}$

---

1. Exprimer le vecteur $\vec{U}$ dans la base B_o

2



$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$
$\vec{v} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$

$\vec{z} = \cos\beta\,\vec{k} - \sin\beta\,\vec{v}$
$= \cos\beta\,\vec{k} - \sin\beta(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$

$\Rightarrow \vec{U} = p\vec{u} + q\vec{k} + r\vec{z} = p\begin{vmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{vmatrix} + q\begin{vmatrix}0\\ 0\\ 1\end{vmatrix} + r\begin{vmatrix}\sin\alpha\sin\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\\ \cos\beta\end{vmatrix}$

$$\boxed{\vec{U} = (p\cos\alpha + r\sin\alpha\sin\beta)\,\vec{i} + (p\sin\alpha - r\cos\alpha\sin\beta)\,\vec{j} + (q + r\cos\beta)\,\vec{k}}$$

---

2. Calculer quand c'est possible :

1   1. $3\vec{w} \wedge 2\vec{k} =$ $6(\vec{w} \wedge \vec{k}) = \boxed{6\cos\beta\,\vec{u}}$

1   2. $\vec{v} \wedge \cos\beta\vec{w} =$ $\cos\beta\,\vec{v} \wedge \vec{w} = \boxed{\cos\beta\sin\beta\,\vec{u}}$

1   3. $(\vec{j}.\vec{u}) \wedge \vec{k} =$ Impossible ($\Leftarrow \vec{j}\cdot\vec{u}$ = scalaire)

(1)

4. $\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{i}) =$ $\vec{v} \wedge (-\sin\alpha\, \vec{k}) = \boxed{-\sin\alpha\, \vec{u}}$

(1)

5. $\|2\vec{u} + 3\vec{z}\|^2 =$ $\|2\vec{u}\|^2 + \|3\vec{z}\|^2 + 12\,\vec{u}.\vec{z} = 4 + 9 + 12 \times 0 = \boxed{13}$

(2)

6. $(\vec{u} + \vec{i}).(\vec{k} - \vec{z}) =$ $(\vec{u} + \vec{i}) \cdot (\vec{k} - \cos\beta\, \vec{k} + \sin\beta\, \vec{v})$

$= \sin\beta\, \underbrace{\vec{u}.\vec{v}}_{0} + (1-\cos\beta)\, \underbrace{\vec{u}.\vec{k}}_{0} + \sin\beta\, \underbrace{\vec{i}.\vec{v}}_{\cos(\alpha+\pi/2)} + (1-\cos\beta)\, \underbrace{\vec{i}.\vec{k}}_{0}$

$= \boxed{-\sin\alpha \sin\beta}$

==

(1)

2. On se donne un torseur $\mathcal{T}$ défini par ses éléments de réduction en un point A par :

$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}(A) \end{bmatrix}_A$

Donner les éléments de réduction de $\mathcal{T}$ au point B en fonction de $\vec{\mathcal{M}}(A)$

$\vec{T} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(B) \end{bmatrix}_B$ avec $\boxed{\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{R}}$