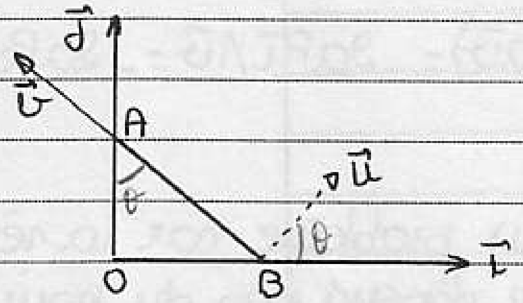
Q11 : Mécanique statique
2008-2009

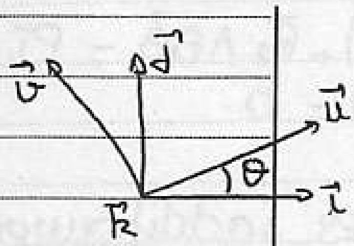
Equilibres de solides et de systèmes de solides

Exercice 1

Dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, avec $\vec{\jmath}$ vertical ascendant, $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ désigne l'accélération de la pesanteur, on considère T une barre homogène de mase m, de longueur $2a$ et d'extrémités A et B. On suppose que la barre repose sans frottement sur l'axe $O\vec{\jmath}$ au point A et sur l'axe $O\vec{\imath}$ au point B. De plus, on exerce au point B une force $\vec{F} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{\imath}$

Déterminer la position d'équilibre de la barre et calculer les réactions du support aux points A et B





la premiere chose à faire pour positionner la barre consiste à déterminer un repère lié à la barre

On note $\vec{v}$ le vecteur unitaire ; $\vec{BA} = 2a\vec{v}$

on introduit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit une base orthonormée directe.

On désigne par θ l'angle $(\vec{\imath}, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{k}$

On fait ensuite le bilan de tous les efforts qui s'exercent sur T

$$\mathcal{T}_{eff}(T) = \underset{①}{\begin{bmatrix} -mg\vec{\jmath} \\ 0 \end{bmatrix}_G} + \underset{②}{\begin{bmatrix} P\vec{\imath} \\ 0 \end{bmatrix}_A} + \underset{③}{\begin{bmatrix} N\vec{\jmath} \\ 0 \end{bmatrix}_B} + \underset{④}{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{\imath} \\ 0 \end{bmatrix}_B}$$

① L'action de la pesanteur se caractérise par un glisseur dont le support passe par G

②,③,④ → forces ponctuelles ⇒ moment nul au point d'application

②,③ réactions purement normale car sans frottement

Pour qu'un solide soit en équilibre il faut et il suffit que le torseur des efforts exercés sur ce solide soit nul.

Pour pouvoir étudier cet équilibre (additionner tous les torseurs) il faut les exprimer au $\overline{m}$ point.

Partant du principe que moins on en fait mieux on se porte et qu'il y a déjà 2 efforts exprimés en B c'est ce point qu'on choisit pour calculer le torseur résultant.

$\mathcal{M}_1(B) = \mathcal{M}_1(G) + \vec{R}_1 \wedge \vec{GB} = -mg\vec{j} \wedge (-a\vec{v}) = mag\,\vec{j} \wedge \vec{v} = mag\sin\theta\,\vec{k}$

$\mathcal{M}_2(B) = \mathcal{M}_2(A) + \vec{R}_2 \wedge \vec{AB} = P\vec{i} \wedge (-2a\vec{v}) = -2aP\,\vec{i} \wedge \vec{v} = -2aP\cos\theta\,\vec{k}$

$\mathcal{M}_3(B) = \mathcal{M}_4(B) = 0$

Les résultantes s'additionnent sans problème car la résultante d'un torseur est unique et ne dépend pas du point choisi pour le calcul. On déduit

$$\mathcal{T}_{eff}(T) = \left[\begin{matrix} (P - \frac{\sqrt{3}}{2}mg)\vec{i} + (N - mg)\vec{j} \\ a(mg\sin\theta - 2P\cos\theta)\vec{k} \end{matrix}\right]_B$$

$$T \text{ équilibre} \Leftrightarrow \mathcal{T}_{eff}(T) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{\sqrt{3}}{2}mg & (1) \\ N = mg & (2) \\ mg\sin\theta - 2P\cos\theta = 0 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow mg\sin\theta - \sqrt{3}\,mg\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$

Soit finalement

$$T \text{ équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \\ N = mg \\ \theta_e = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Feuille Intercalaire N° ....

Exercice 2

Dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, avec $\vec{\jmath}$ vertical ascendant, $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ désigne l'accélération de la pesanteur, on considère S un disque homogène de masse m. Ce disque est posé sur un axe $O\vec{u}$ incliné d'un angle α par rapport à l'axe horizontal $O\vec{\imath}$. On note I le point de contact entre le disque et l'axe $O\vec{u}$

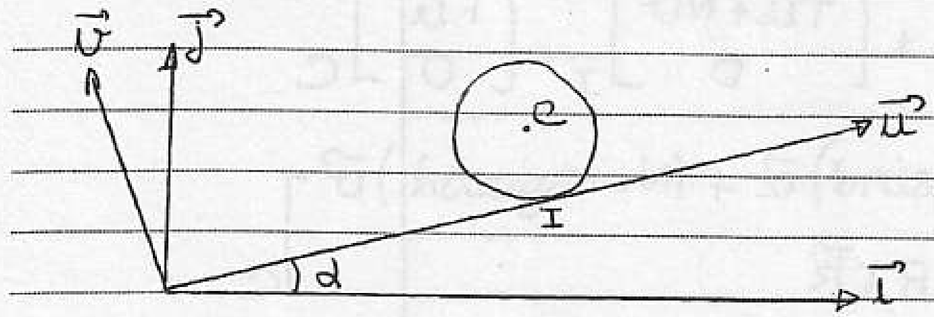
1. Montrer qu'aucun équilibre n'est possible si le disque est homogène

2. On exerce au point C une force ponctuelle $F\vec{u}$. Quelle doit être l'intensité de F pour que $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ soit compatible avec l'équilibre de S

3.On suppose que le disque n'est plus homogène et que son centre de gravité A est tel que : $\overrightarrow{CA} = R(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})$.

On exerce au point A une force $\vec{T} = \dfrac{\cancel{M}\ m}{2} g\,\vec{u}$ et on suppose que le contact en I a lieu sans frottement.

Déterminer les valeurs de α et de θ pour que S soit à l'équilibre.



On introduit $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit orthonormée directe

1. On va supposer $\alpha \neq 0$ car un plan incliné d'un angle nul perd pas mal de crédibilité

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \underbrace{\begin{bmatrix} -mg\vec{\jmath} \\ 0 \end{bmatrix}_C}_{1} + \underbrace{\begin{bmatrix} T\vec{u} + N\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_I}_{2}$$

Le choix d'exprimer ce torseur en C ou en I est indifférent et laissé à la sensibilité de chacun (NON choix de C à cause de la question 2)

Allez on opte pour C

$\vec{\mathcal{M}}_1(C) = 0$

$\vec{\mathcal{M}}_2(C) = \vec{\mathcal{M}}_2(I) + \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{IC} = (T\vec{u} + N\vec{v}) \wedge R\vec{v} = RT\vec{k}$

On a alors

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} (T - mg\sin\alpha)\vec{u} + (N - mg\cos\alpha)\vec{v} \\ RT\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

S équilibre $\Leftrightarrow \mathcal{T}_{eff}(S) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \\ T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 0 \\ \alpha = 0 \\ N = mg \end{cases}$

($N > 0$: contact unilatéral)

On a supposé $\alpha \neq 0$, il ne peut donc pas y avoir d'équilibre dans ce genre de situation.

2. On rajoute une force au point C

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} T\vec{u} + N\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} F\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} (T + F - mg\sin\alpha)\vec{u} + (N - mg\cos\alpha)\vec{v} \\ RT\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

S équilibre $\Leftrightarrow \begin{cases} T = 0 \\ F = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ assure l'équilibre de S $\Rightarrow \begin{cases} T = 0 \\ F = \frac{m}{2}g \\ N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \end{cases}$

3. C n'est plus le centre de gravité de S et le disque ne frotte plus sur le sol

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} N\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} \frac{m}{2}g\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

Pour une raison évidente, c'est en A qu'on va exprimer ce torseur

$\vec{\mathcal{M}}_2(A) = \vec{\mathcal{M}}_2(I) + \vec{R}_2 \wedge \vec{IA} = N\vec{v} \wedge (\vec{IC} + \vec{CA}) = N\vec{v} \wedge R(\vec{v} + \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$

$\vec{\mathcal{M}}_2(A) = RN(-\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\vec{k} = -RN\cos(\theta - \alpha)\vec{k}$

$$\mathcal{C}_{eff}(S) = \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} g (1 - 2\sin\alpha)\vec{u} + (N - mg\cos\alpha)\vec{v} \\ -RN\cos(\theta - \alpha)\,\vec{k} \end{matrix} \right]_A$$

$$S \text{ équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin\alpha = 0 & (1) \\ N = mg\cos\alpha & (2) \\ N\cos(\theta - \alpha) = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$

$(2) \Rightarrow N = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} mg$

La condition de contact unilatéral, $N > 0$ impose

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $N = \frac{\sqrt{3}}{2} mg$

$(3) \Rightarrow \cos(\theta - \alpha) = 0 \Rightarrow \theta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = \alpha \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$

Feuille intercalaire N° ....

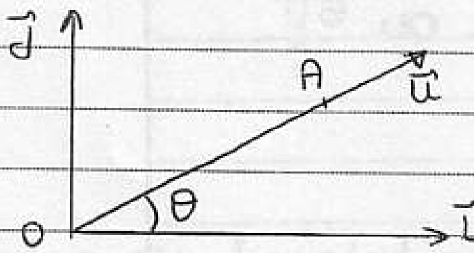
- **Exercice 3**

Dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, avec $O\vec{j}$ vertical ascendant, $\vec{g} = g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère une barre S homogène de masse M, d'extrémités O et A et de longueur a. On note $O\vec{u}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{u}$, et θ l'angle entre les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{u}$.

La liaison entre S et le bâti fixe modélisé par le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une liaison pivot d'axe $O\vec{k}$.

On exerce sur la barre un couple $\gamma\vec{k}$ d'intensité $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4}Mag$.

Déterminer la position d'équilibre de S.



$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} -Mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} \vec{R}_0 \\ \vec{m}(O) \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma\vec{k} \end{bmatrix}_\forall$$
① ② ③

avec $\vec{m}(O).\vec{k} = 0$

① La pesanteur est un glisseur dont le support passe par le centre de gravité $\vec{m}_1(G) = 0$

② Dans le cas d'un solide plan les rotations éventuelles ont lieu autour de l'axe perpendiculaire à ce plan $\Rightarrow$ une liaison pivot se conduit comme une liaison sphérique.

③ Un couple est un torseur dont la résultante - le moment est égal en tout point.

On exprime le torseur en O à cause de la liaison

$\vec{m}_1(O) = \vec{m}_1(G) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{GO} = -Mg\vec{j} \wedge (-\frac{a}{2})\vec{u} = -\frac{Ma}{2} g\cos\theta\,\vec{k}$

$\vec{m}_2(O) = 0$

$\vec{m}_3(O) = \gamma\vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{4} Mag\,\vec{k}$

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} \vec{R}_0 - Mg\vec{J} \\ \frac{Mag}{4}(\sqrt{3} - 2\cos\theta)\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

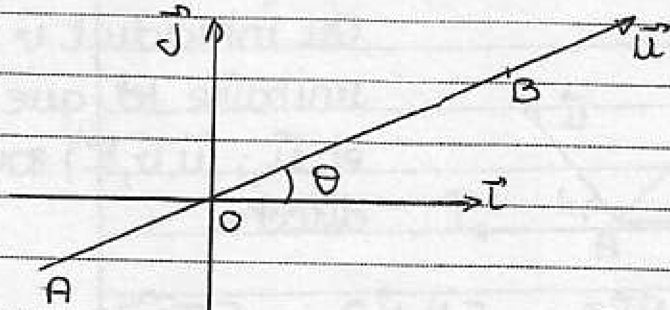
S équilibre $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_0 = Mg\vec{J} \\ \sqrt{3} - 2\cos\theta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \theta = \pm\pi/6$

Exercice 4

Relativement au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (avec $O\vec{j}$ vertical ascendant), $\vec{g}=-g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur on considère un solide S situé dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. S est une barre homogène de masse M, d'extrémités A et B et de longueur a. On introduit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AB}=a\vec{u}$. On pose $\overrightarrow{AO}=x\vec{u}$ et on note $\theta=(\vec{i},\ \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{k}$.

La liaison entre le batît fixe modélisée par $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et la barre est une liaison pivot parfaite d'axe $O\vec{k}$

On exerce sur la barre un couple $\gamma\vec{k}=\dfrac{mag}{4}\sin\theta\vec{k}$. Déterminer la distance x pour que $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ soit une position d'équilibre



$$\mathcal{T}_{eff}(S)=\underset{①}{\begin{bmatrix}-mg\vec{j}\\0\end{bmatrix}_G}+\underset{②}{\begin{bmatrix}\vec{R}_O\\\mathcal{M}(O)\end{bmatrix}_O}+\underset{③}{\begin{bmatrix}\vec{0}\\\frac{mag}{4}\sin\theta\vec{k}\end{bmatrix}_\forall}\quad \text{avec } \mathcal{M}(O).\vec{k}$$

Pour s'affranchir du problème de la réaction de la liaison pivot c'est au point O qu'on va exprimer ce torseur.

$$\mathcal{M}_1(O)=\mathcal{M}_1(G)+\vec{R}_1\wedge\overrightarrow{GO}=-mg\vec{j}\wedge\overrightarrow{GO}$$

$$\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AO}=-\frac{a}{2}\vec{u}+x\vec{u}=-\left(\frac{a}{2}-x\right)\vec{u}$$

$$\mathcal{M}_1(O)=mg\left(\frac{a}{2}-x\right)\vec{j}\wedge\vec{u}=-mg\left(\frac{a}{2}-x\right)\cos\theta\ \vec{k}$$

$$\mathcal{M}_2(O)=\mathcal{M}(O)\quad\text{avec}\quad\mathcal{M}(O).\vec{k}=0$$

$$\mathcal{M}_3(O)=\frac{ma}{4}g\sin\theta\ \vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(S)=\begin{bmatrix}\vec{R}_O-mg\vec{j}\\\vec{\mathcal{M}}(O)+\frac{mg}{4}(a\sin\theta-2a\cos\theta+4x\cos\theta)\vec{k}\end{bmatrix}_O$$

$$S\text{ équilibre}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{R}_O=mg\vec{j} & \text{(mais on s'en fiche)}\quad (i)\\\vec{\mathcal{M}}(O)+\frac{mg}{4}(a\sin\theta-2a\cos\theta+4x\cos\theta)\vec{k}=0 & (ii)\end{cases}$$

On projette (ii) suivant $\vec{k}\Rightarrow a\sin\theta-2a\cos\theta+4x\cos\theta=0$

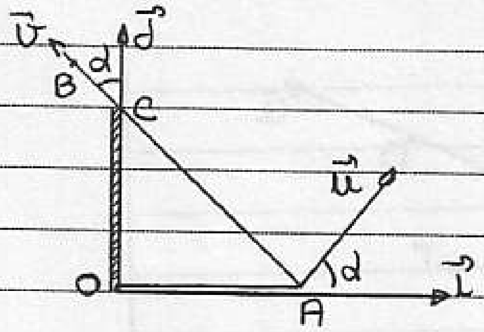
si $\theta_e=\frac{\pi}{4}$ alors $\sin\theta_e=\cos\theta_e\Rightarrow 4x=a\Rightarrow x=\frac{a}{4}$

On peut aussi signaler que dans le cas d'un solide plan une liaison pivot se conduit comme une liaison sphérique.

Dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, avec $O\vec{j}$ vertical ascendant, $\vec{g} = g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère une barre S homogène de masse M, d'extrémités A et B et de longueur ℓ. Cette barre repose sur le sol au point A et est appuyée sur un mur vertical en un point C. On note h la hauteur du point C et α l'angle entre la verticale ascendante et la barre AB mesuré autour de $\vec{k}$.

L'extrémité A est maintenue par un fil $[OA]$ inextensible de masse négligeable

1. On suppose que le contact en A et en C a lieu sans frottement, déterminer les réactions en A, en C ainsi que la tension du fil lorsque la barre est en équilibre.
2. On suppose maintenant que le contact en A obéit à une loi de Coulomb de coefficient de frottement f, que que le contact en C a toujours lieu sans frottement. Déterminer une condition d'équilibre lorsque l'on supprime le fil.



On introduit $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $\vec{AB} = \ell\vec{v}$ et $\vec{u}$, $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ soit orthonormée directe

$$\mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -Mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} N\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} N_c\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} T\vec{i} \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

réactions purement normale car ss frott^t — tension du fil

Exprimer ce torseur en A se justifie par le fait que 2 éléments sont déjà écrits en A

$\vec{m}_1(A) = \vec{m}_1(G) + \vec{R}_1 \wedge \vec{GA} = -Mg\vec{j} \wedge \left(-\frac{\ell}{2}\vec{v}\right) = \frac{M\ell}{2} g \sin\alpha\, \vec{k}$

$m_2(A) = m_4(A) = 0$

$m_3(A) = N_c\vec{u} \wedge \vec{CA} = -N_c\vec{u} \wedge \frac{h}{\cos\alpha}\vec{v} = -\frac{hN_c}{\cos\alpha}\vec{k}$

Il vient

$$\mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} (T + N_c\cos\alpha)\vec{i} + (N - Mg + N_c\sin\alpha)\vec{j} \\ \left(\frac{M\ell}{2} g\sin\alpha - \frac{hN_c}{\cos\alpha}\right)\vec{k} \end{bmatrix}_A$$

$$\mathcal{B} \text{ équil} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} T + N_c\cos\alpha = 0 \\ N + N_c\sin\alpha = Mg \\ N_c = \frac{M\ell}{2h} g\sin\alpha\cos\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} N_c = \frac{M\ell}{2h} g\sin\alpha\cos\alpha \\ T = -\frac{M\ell}{2h} g\sin\alpha\cos^2\alpha \\ N = \left(1 - \frac{\ell}{2h}\sin^2\alpha\cos\right) Mg \end{array} \right.$$

2 Si on enlève le fil en ajoutant une condition de frottement en A on aura

$|T| < fN$

$$\frac{m\ell}{2R} g |\sin\alpha\cos^2\alpha| < f m g \left(1 - \frac{\ell}{2R}\sin^2\alpha\cos\alpha\right)$$

On peut raisonnablement restreindre l'étude de cet équilibre au cas où $\alpha \in [0, \pi/2]$, alors

$$\frac{\ell}{2R}\sin\alpha\cos^2\alpha < f\left(1 - \frac{\ell}{2R}\sin^2\alpha\cos\alpha\right)$$

Le coefficient de frottement doit alors être tel que

$$f > \frac{\ell\sin\alpha\cos^2\alpha}{2R - \ell\sin^2\alpha\cos\alpha}$$