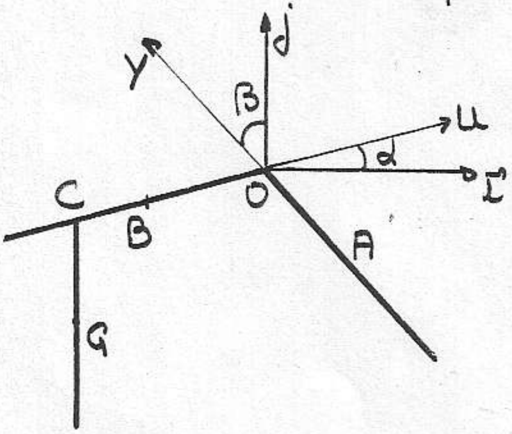
Exercice 6

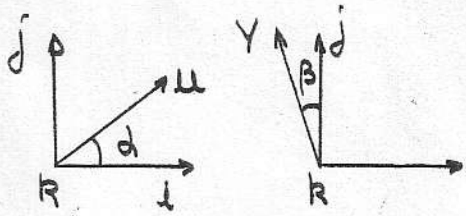
Mécanique statique
Q21 Juin 2003

I. Etude d'un équilibre

1. Un solide est en équilibre lorsque le torseur des efforts exercés sur ce solide est nul.

2. Un système de solides est en équilibre lorsque chaque solide de ce système est en équilibre





3. Torseur des efforts

$$. \mathcal{T}_{eff}(B_1) = \begin{bmatrix} -M_1 g\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathcal{M}_1(O) \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_1}{4} lg\vec{k} \end{bmatrix}_\forall \quad \text{avec } \mathcal{M}_1(O).\vec{k} = 0$$

Pour exprimer le torseur des efforts qui s'exercent sur B_1 au point O, on utilise la relation sur les moments

$$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + R \wedge \vec{AB}$$

En ce qui concerne $\mathcal{T}_{eff}(B_1)$ cette opération ne concerne que l'action de la pesanteur, il vient:

$$\mathcal{M}_{pes}(O) = -M_1 g\vec{J} \wedge \vec{AO} = -M_1 g\vec{J} \wedge \frac{l}{2}\vec{Y} = -\frac{M_1}{2} lg \sin\beta \vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(B_1) = \begin{bmatrix} R_1 - M_1 g\vec{J} \\ \mathcal{M}_1(O) + \frac{M_1}{4} lg(1-2\sin\beta)\vec{k} \end{bmatrix}_O \quad \text{avec } \mathcal{M}_1(O).\vec{k} = 0$$

$$. \mathcal{T}_{eff}(B_3) = \begin{bmatrix} -M_3 g\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} \vec{R_3} \\ \mathcal{M}_3(C) \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} M_3 g\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_C \quad \text{avec } \vec{R_3}.\vec{u} = 0$$

$-m_3 g\vec{J} \wedge \vec{GC} = 0$ car $\vec{GC} \parallel \vec{J}$

$$\mathcal{T}_{eff}(B_3) = \begin{bmatrix} \vec{R_3} - m_3 g\vec{J} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} \\ \mathcal{M}_3(C) \end{bmatrix}_C \quad \text{avec } \vec{R_3}.\vec{u} = 0$$

$$\cdot\ \mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} -m_1 g\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} -m_2 g\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} m_3 g\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} \vec{R_1} \\ \mathcal{M}_1(O) \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} \vec{R_2} \\ \mathcal{M}_2(O) \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

$$-m_1 g\vec{J} \wedge \vec{AO} = -\frac{m_1}{2} lg \sin\beta \vec{k}$$

$$-m_2 g\vec{J} \wedge \vec{BO} = -m_2 g\vec{J} \wedge \frac{L}{2}\vec{u} = \frac{m_2}{2} Lg\cos\alpha \vec{k}$$

$$-m_3 g\vec{J} \wedge \vec{GO} = -m_3 g\vec{J} \wedge (\vec{GC} + x\vec{u}) = m_3 x g\cos\alpha \vec{k}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} \wedge \vec{CO} = \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} \wedge x\vec{u} = 0$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} \vec{R_1} + \vec{R_2} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} - (m_1 + m_2 + m_3) g\vec{J} \\ \vec{\mathcal{M}_1}(O) + \vec{\mathcal{M}_2}(O) + (-m_1 l\sin\beta + m_2 L\cos\alpha + 2m_3 x\cos\alpha)\frac{g}{2}\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

4. Equations d'équilibre

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \mathcal{T}_{eff}(B_1) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(B_2) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(B_3) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \mathcal{T}_{eff}(B_1) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(B_3) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = 0 \end{array} \right.$$

Pour que le système Σ soit en équilibre, il faut que les équations suivantes soient satisfaites

$$\left\| \begin{array}{ll} (1) & \vec{R_1} - m_1 g\vec{J} = 0 \\ (2) & \mathcal{M}_1(O) + \frac{m_1}{4} lg(1 - 2\sin\beta)\vec{k} = 0 \quad \text{avec } \mathcal{M}_1(O).k = 0 \\ (3) & \vec{R_3} - m_3 g\vec{J} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} = 0 \quad \text{avec } R_3.\vec{u} = 0 \\ (4) & \mathcal{M}_3(C) = 0 \\ (5) & \vec{R_1} + \vec{R_2} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} - (m_1 + m_2 + m_3) g\vec{J} = 0 \\ (6) & \vec{\mathcal{M}_1}(O) + \vec{\mathcal{M}_2}(O) + (-m_1 l\sin\beta + m_2 L\cos\alpha + 2m_3 x\cos\alpha)\frac{g}{2}\vec{k} = 0 \end{array} \right.$$

On projette (2) suivant $\vec{k}$, il vient $\sin\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$

On projette (3) suivant $\vec{u}$ et on déduit :

$$-m_3 g \sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ et } \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

si on tient compte de ces résultats et qu'on exprime la $6^{ème}$ équation dans la direction $\vec{k}$ on a :

$$-m_1 l \sin\beta + m_2 L \cos\alpha + 2m_3 x \cos\alpha = 0$$

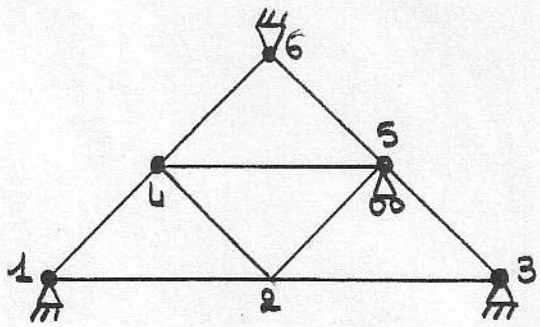
$$-m_1 l + m_2 L + 2m_3 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m_1 l - m_2 L}{2m_3}$$

5. Condition de compatibilité

L'équilibre de (Σ) repose (en partie) sur le fait que les barres B_1 et B_3 sont en contact au point C, par conséquent $0 \leq x \leq L$

$$0 \leq \frac{m_1 l - m_2 L}{2m_3} \leq L \Rightarrow 0 \leq m_1 l - m_2 L \leq 2m_3 L \Rightarrow \boxed{m_2 \frac{L}{l} \leq m_1 \leq (2m_3 + m_2)\frac{L}{l}}$$

II. Etude d'un treillis



1. Degré de staticité du treillis

nbre de noeuds = 6 $\Rightarrow$ 12 équations statiques

nbre de barres = 9

nbre d'appuis fixes = 3

nbre d'appuis mobiles : 1

Il y a $9 + 3*2 + 1 = 16$ inconnues statiques

Ce treillis est hyperstatique de degré 4