Exercice 4

Dans le repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A et B tels que $\overrightarrow{OA}=a\vec{i}$ et $\overrightarrow{OB}=a\vec{j}$ (a est une constante non nulle)

On considère un torseur $\mathcal{T}=\begin{bmatrix}\vec{R}\\ \vec{u}(P)\end{bmatrix}_{\mathcal{P}}$ qui satisfait $\vec{u}(A)=\vec{u}(B)=a(\vec{j}-\vec{k})$ et $\vec{u}(O).\vec{k}=0$

1. Déterminer $\vec{u}(O)$
2. Calculer la résultante et l'axe central de $\mathcal{T}$

1. si $\vec{u}$ est un champ équiprojectif (définit un torseur)

alors $\forall P,Q \quad [\vec{u}(Q)-\vec{u}(P)].\overrightarrow{PQ}=0$

On aura en particulier

$$\begin{cases}[\vec{u}(B)-\vec{u}(O)].\overrightarrow{OB}=0\\ [\vec{u}(A)-\vec{u}(O)].\overrightarrow{OA}=0\end{cases}$$

On pose (pour le calcul) $\vec{u}(O)=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ avec $\gamma=0$ car $\vec{u}(O).\vec{k}=0$

$$[\vec{u}(B)-\vec{u}(O)].\overrightarrow{OB}=0 \Rightarrow a(a-\beta)=0 \Rightarrow \beta=a$$
$$[\vec{u}(A)-\vec{u}(O)].\overrightarrow{OB}= \Rightarrow a\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0 \quad \Rightarrow \vec{u}(O)=\begin{pmatrix}0\\ a\\ 0\end{pmatrix}$$

2. $\vec{u}$ définit un torseur $\Rightarrow \exists!\,\vec{R}\begin{pmatrix}p\\ q\\ r\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \cdot \forall O,P \quad \vec{u}(P)=\vec{u}(O)+R\wedge\overrightarrow{OP}$

Cette relation sera vraie en particulier pour les points O, A et B.

$$\vec{u}(A)=\vec{u}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OA} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\ a\\ -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ a\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p\\ q\\ r\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}a\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}0=0\\ r=0\\ -q=-1\end{cases}$$

△2

p n'a pas été déterminé ne signifie pas $p=0$

Il faut à nouveau exploiter la relation sur les torseurs

$$\vec{u}(B)=\vec{u}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OB} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\ a\\ -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ a\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p\\ q\\ r\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ a\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}r=0\\ 0=0\\ ap=-a\end{cases}$$

et finalement $\boxed{\vec{R}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}$

$\Delta=\{P\in\mathcal{E},\ \vec{R}\wedge\vec{u}(P)=0\}$

$$\forall P\in\mathcal{E} \quad \vec{u}(P)=\vec{u}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}0\\ a\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\ a+z\\ -x-y\end{pmatrix}$$

$$\vec{R}\wedge\vec{u}(P)=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}z\\ a+z\\ -x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-y\\ x+y\\ -a-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}x=-y\\ z=-\frac{a}{2}\end{matrix}}$$