CONTROLE N ° 2 DU MODULE M232

SUJET A

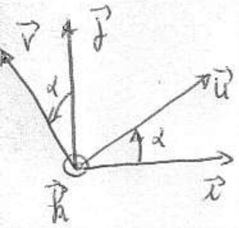
EXERCICE 1

Soient $B_0(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $B_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ deux bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ telles que :

$B_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est déduite de $B_0(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une rotation d'angle α mesurée autour de $\vec{k}$.

Exprimer dans la base B_0 :

1) $(2\vec{i} + 3\vec{v}) \wedge \vec{k}$
2) $(2\vec{u} + 3\vec{j}) \wedge \vec{v}$

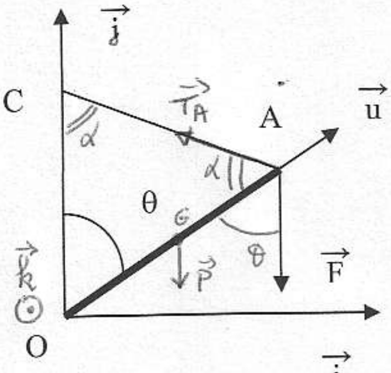


1) $(2\vec{i}+3\vec{v})\wedge\vec{k} = 2(\vec{i}\wedge\vec{k}) + 3(\vec{v}\wedge\vec{k}) = -2\vec{j}+3\vec{u}$
et comme $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$, on obtient dans la base B_0 : $\boxed{3\cos\alpha\,\vec{i}+(-2+3\sin\alpha)\vec{j}}$ (2)

2) $(2\vec{u}+3\vec{j})\wedge\vec{v} = 2\vec{k}+3\sin\alpha\,\vec{k} = \boxed{(2+3\sin\alpha)\vec{k}}$ (2)

EXERCICE 2

Le repère orthonormé direct $R_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $O\vec{j}$ axe vertical ascendant, est supposé galiléen et on désigne par $\vec{g} = -g\vec{j}$ l'accélération de la pesanteur. On considère une barre S homogène de masse m , de longueur L et d'extrémités O et A , située dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $\vec{u}$, le vecteur unitaire dirigé de O vers A et on note θ , l'angle $(\vec{j}, \vec{u})$. La barre est en liaison pivot parfaite d'axe $O\vec{k}$ avec le support au point O, et un fil inextensible et sans masse relie l'extrémité A de la barre à un point C tel que $\overrightarrow{OC} = L\vec{j}$. On exerce de surcroît sur la barre une force $\vec{F} = -F\vec{j}$ au point A.



1) Exprimer l'angle α entre $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{CA}$ en fonction de θ.
2) Déterminer le torseur des efforts qui s'exercent sur S.
3) En déduire le module T_A de la tension du fil en A en fonction de θ , F et mg, lorsque S est en équilibre.
4) Calculer la valeur de T_A en fonction de mg pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $F = \frac{3}{2}mg$

---

1) On a $\pi = 2\alpha+\theta$ (somme des angles d'un triangle) $\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}$ (1)

2) $T(S) = \begin{bmatrix}\vec{R_O}\\ \vec{0}\end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix}-mg\vec{j}\\ \vec{0}\end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix}\vec{T_A}+\vec{F}\\ \vec{0}\end{bmatrix}_A$. On exprime tout en O pour s'affranchir de $\vec{R_O}$ $\Rightarrow T(S) = \begin{bmatrix}\vec{R_O}\\ \vec{0}\end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix}-mg\vec{j}\\ \overrightarrow{OG}\wedge(-mg\vec{j})\end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix}\vec{T_A}+\vec{F}\\ \overrightarrow{OA}\wedge(\vec{T_A}+\vec{F})\end{bmatrix}_O$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OG}\wedge(-mg)\vec{j} = -\frac{L}{2}mg\,\vec{k}\sin\theta \\ \overrightarrow{OA}\wedge\vec{T_A} = LT_A\,\vec{k}\sin\alpha \\ \overrightarrow{OA}\wedge\vec{F} = LF(-\vec{k})\sin\theta\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T(S) = \begin{bmatrix}\vec{R_O}-mg\vec{j}+\vec{T_A}+\vec{F}\\ L\vec{k}\left(-\frac{mg}{2}\sin\theta+T_A\sin\alpha-F\sin\theta\right)\end{bmatrix}_O}$ (2)

3) S en équilibre $\Leftrightarrow T(S) = \begin{bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{bmatrix}$. On déduit :
$T_A = \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\left(F+\frac{mg}{2}\right) = \frac{\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(F+\frac{mg}{2}\right)$ et comme $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, il vient (2)
$\boxed{T_A = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(F+\frac{mg}{2}\right)}$

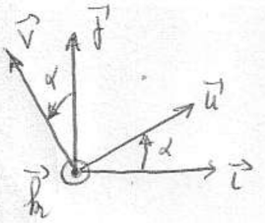
4) Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $F = \frac{3}{2}mg$, on calcule $T_A = 2\sin\frac{\pi}{6}\times 2mg = \boxed{2mg}$ (1)

SUJET B

EXERCICE 1

Soient $B_0(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $B_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ deux bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ telles que :
$B_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est déduite de $B_0(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une rotation d'angle α mesurée autour de $\vec{k}$.
Exprimer dans la base B_0 :

1) $(2\vec{u} + 3\vec{j}) \wedge \vec{k}$
2) $(2\vec{i} + 3\vec{v}) \wedge \vec{u}$

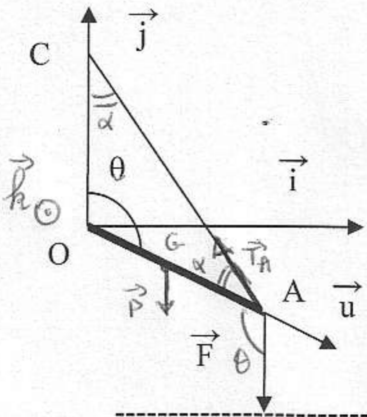


1) $(2\vec{u}+3\vec{j}) \wedge \vec{k} = 2(\vec{u}\wedge\vec{k}) + 3(\vec{j}\wedge\vec{k}) = -2\vec{v}+3\vec{i}$
et comme $\vec{v} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$, on obtient dans la base B_0 $\boxed{(2\sin\alpha+3)\vec{i} - 2\cos\alpha\,\vec{j}}$ (2)

2) $(2\vec{i}+3\vec{v}) \wedge \vec{u} = 2\vec{k}\sin\alpha - 3\vec{k} = \boxed{(2\sin\alpha - 3)\vec{k}}$ (2)

EXERCICE 2

Le repère orthonormé direct $R_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $O\vec{j}$ axe vertical ascendant, est supposé galiléen et on désigne par $\vec{g} = -g\vec{j}$ l'accélération de la pesanteur. On considère une barre S homogène de masse m, de longueur L et d'extrémités O et A, située dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $\vec{u}$, le vecteur unitaire dirigé de O vers A et on note θ, l'angle $(\vec{j}, \vec{u})$. La barre est en liaison pivot parfaite d'axe $O\vec{k}$ avec le support au point O, et un fil inextensible et sans masse relie l'extrémité A de la barre à un point C tel que $\overrightarrow{OC} = L\vec{j}$. On exerce de surcroît sur la barre une force $\vec{F} = -F\vec{j}$ au point A.



1) Exprimer l'angle α entre $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{CA}$ en fonction de θ.
2) Déterminer le torseur des efforts qui s'exercent sur S.
3) En déduire le module T_A de la tension du fil en A en fonction de θ, F et mg, lorsque S est en équilibre.
4) Calculer la valeur de T_A en fonction de mg pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $F = \frac{1}{2}$ mg

---

1) Voir sujet A (1)
2) Voir sujet A (2)
3) Voir sujet A (2)
4) Pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $F = \frac{mg}{2}$, on calcule $T_A = 2\sin\frac{\pi}{3}\,mg = \boxed{mg\sqrt{3}}$ (1)