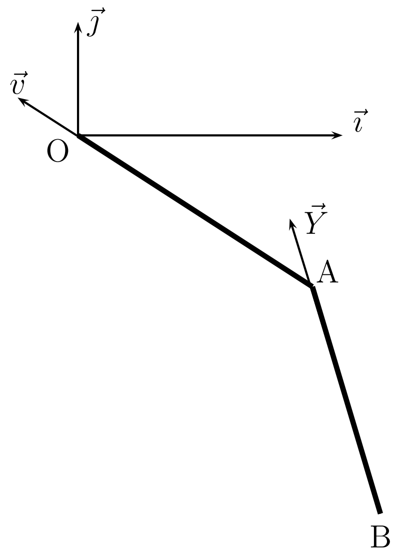
MECANIQUE STATIQUE
Examen de Juin 2010

Exercice 1 : Etude d'un équilibre

Relativement au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (avec $\vec{j}$ vertical ascendant), $\vec{g} = -g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère un système Σ situé dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Σ est constitué de deux barres homogènes S_1 et S_2 de même masse m et de même longueur ℓ :

S_1 d'extrémités O et A, et de milieu G_1, est liée au bâti par une liaison rotule parfaite en O.
S_2 d'extrémités A et B, et de milieu G_2, est liée à la barre S_1 par une liaison pivot en A.
On introduit $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AO} = \ell\vec{v}$ et on désigne par α l'angle $(\vec{j}, \vec{v})$ mesuré autour de $\vec{k}$
On introduit $\vec{Y}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{BA} = \ell\vec{Y}$ et on désigne par θ l'angle $(\vec{j}, \vec{Y})$ mesuré autour de $\vec{k}$
La barre S_1 exerce sur la barre S_2 un couple $\gamma\,\vec{k} = \dfrac{m\ell g}{4}\,\vec{k}$.
On exerce en plus sur S_1 au point A une force $F\vec{\imath}$.



1. Questions de cours

(i) Un solide est en équilibre lorsque le torseur des efforts exercés sur ce solide est nul.

(ii) Un système de solides est en équilibre lorsque chaque solide qui constitue le système est en équilibre.

(iii) Un couple est un torseur dont la résultante est nulle : $\quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{M}(A) \end{bmatrix}_{\mathrm{A}}$.

(iv) Il suffit d'utiliser la relation sur les torseurs

$$\forall A, B \qquad \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} = \mathcal{M}(A)$$

2. Torseur des efforts exercés sur S_2

$$\mathcal{T}_{\text{eff}}(S_2) = \begin{bmatrix} -mg\vec{\jmath} \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{G}_2} + \begin{bmatrix} \vec{R}_a \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{A}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{m\ell\, g}{4}\,\vec{k} \end{bmatrix}_{\forall}$$

Pour pouvoir additionner ces torseurs, il est nécessaire au préalable de les exprimer au même point. Pour cela, on utilise la relation sur les torseurs. Il vient

$$-mg\,\vec{\jmath}\wedge\overrightarrow{G_2A} = -\frac{m\ell}{2}\,g\,\vec{\jmath}\wedge\vec{Y} = -\frac{m\ell}{2}\,g\sin\theta\,\vec{k} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{T}_{\text{eff}}(S_2) = \begin{bmatrix} \vec{R}_a - mg\,\vec{\jmath} \\ \dfrac{m\ell\, g}{4}\,(1-2\sin\theta)\,\vec{k} \end{bmatrix}_{\text{A}}$$

3. Torseur des efforts exercés sur le système Σ

$$\mathcal{T}_{\text{eff}}(\Sigma) = \begin{bmatrix} \vec{R}_o \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{O}} + \begin{bmatrix} -mg\vec{\jmath} \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{G}_1} + \begin{bmatrix} F\,\vec{\imath} \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{A}} + \begin{bmatrix} -mg\vec{\jmath} \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{G}_2}$$

$$-mg\,\vec{\jmath}\wedge\overrightarrow{G_1O} = -\frac{m\ell}{2}\,g\,\vec{\jmath}\wedge\vec{v} = -\frac{m\ell}{2}\,g\sin\alpha\,\vec{k}$$

$$-mg\,\vec{\jmath}\wedge\overrightarrow{G_2O} = -\frac{m\ell}{2}\,g\,\vec{\jmath}\wedge(\vec{Y}+2\vec{v}) = -\frac{m\ell}{2}\,g(\sin\theta+2\sin\alpha)\,\vec{k}$$

$$F\,\vec{\imath}\wedge\overrightarrow{AO} = F\,\vec{\imath}\wedge\ell\vec{v} = F\ell\cos\alpha\,\vec{k}$$

Et finalement

$$\mathcal{T}_{\text{eff}}(\Sigma) = \begin{bmatrix} \vec{R}_o + F\,\vec{\imath} - 2 - mg\vec{\jmath} \\ \dfrac{\ell}{2}\,\left[2F\cos\alpha - mg\,(\sin\theta+3\sin\alpha)\right]\,\vec{k} \end{bmatrix}_{\text{O}}$$

4. Equations d'équilibre

$$\Sigma \text{ est en équilibre} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \mathcal{T}_{\text{eff}}(S_1) = 0 \\ \mathcal{T}_{\text{eff}}(S_2) = 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \mathcal{T}_{\text{eff}}(S_2) = 0 \\ \mathcal{T}_{\text{eff}}(\Sigma) = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma \text{ est en équilibre} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 1-2\sin\theta = 0 & (1) \\ F\cos\alpha = \dfrac{mg}{2}\,(\sin\theta+3\sin\alpha) & (2) \end{cases}$$

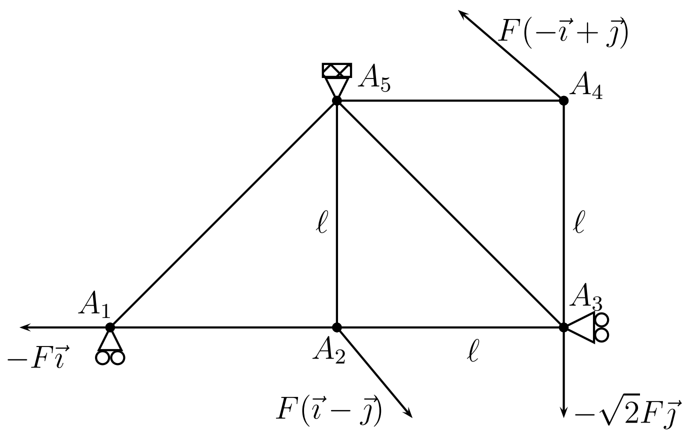
5. Etude d'un équilibre particulier

$$(1) \quad\Longleftrightarrow\quad sin\theta = \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \theta = \frac{\pi}{6} \;\text{ ou }\; \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Si } \alpha = 0, \quad (2) \quad\Longleftrightarrow\quad F = \frac{mg}{2}\,\sin\theta = \frac{mg}{4}$$

Exercice 2 : Etude d'un treillis

Dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le treillis élastique plan schématisé ci-dessous. Toutes les barres ont la même section S.



Le noeud A_5 est en appui fixe, le noeud A_1 est en appui mobile selon $\vec{\imath}$, le noeud A_3 en appui mobile selon $\vec{\jmath}$ alors que les noeuds A_2 et A_4 sont libres .

Les barres $A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_2A_5,\ A_3A_4$ et A_4A_5 ont même longueur ℓ.
Le module d'Young de la barre A_1A_5 est de $\sqrt{2}E$, toutes les autres barres ont le même module d'Young E

Une charge $-F\,\vec{\imath}$ est appliquée au noeud A_1, une charge $F\,(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$ est appliquée au noeud A_2, une charge $-\sqrt{2}F\,\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_3 et une charge $F\,(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ est appliquée au noeud A_4.

On note T_{ij} la tension qui règne dans la barre A_iA_j. Dans cet exercice on ne cherchera pas à calculer les réactions aux appuis

1. Ce treillis est constitué de 5 noeuds, soit 10 équations statiques. Quant aux inconnues : Il y a 7 barres (soit 7 tensions) et 1 appui fixe et 2 appuis mobiles (7+4 inconnues). Le système statique est alors un système de 10 équations à 11 inconnues. Ce treillis est donc hyperstatique de degré 1.

2. Pour chacune des barres du treillis on écrit la relation qui unit les déplacements des noeuds à la déformation des barres : $(\vec{u}_j - \vec{u}_i)\,.\,\vec{e}_{ij} = \ell_{ij}\,\varepsilon_{ij}$

Sachant que :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \qquad u_5 = 0$$

on aura :

$$
\begin{array}{lll}
\text{Barre } [1,2] \implies (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)\,.\,\vec{i} = \ell\,\varepsilon_{12} & \implies & x_2 - x_1 = \ell\,\varepsilon_{12} \\
\text{Barre } [1,5] \implies (\vec{u}_5 - \vec{u}_1)\,.\,(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 2\ell\,\varepsilon_{15} & \implies & x_1 = -2\ell\,\varepsilon_{15} \\
\text{Barre } [2,3] \implies (\vec{u}_3 - \vec{u}_2)\,.\vec{\imath} = \ell\,\varepsilon_{23} & \implies & x_2 = -\ell\,\varepsilon_{23} \\
\text{Barre } [2,5] \implies (\vec{u}_5 - \vec{u}_2)\,.\vec{\jmath} = \ell\,\varepsilon_{25} & \implies & y_2 = -\,\ell\,\varepsilon_{25} \\
\text{Barre } [3,4] \implies (\vec{u}_4 - \vec{u}_3)\,.\,\vec{\jmath} = \ell\,\varepsilon_{34} & \implies & y_4 - y_3 = \ell\,\varepsilon_{34} \\
\text{Barre } [3,5] \implies (\vec{u}_5 - \vec{u}_3)\,.\,(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 2\,\ell\,\varepsilon_{35} & \implies & y_3 = -2\ell\,\varepsilon_{35} \\
\text{Barre } [4,5] \implies (\vec{u}_5 - \vec{u}_4)\,.\vec{\imath} = -\ell\,\varepsilon_{45} & \implies & x_4 = \ell\,\varepsilon_{45}
\end{array}
$$

On déduit de ce système que :

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = -2\ell\,\varepsilon_{15} & y_1 = 0 \\
x_2 = -\ell\,\varepsilon_{23} & y_2 = -\ell\varepsilon_{25} \\
x_3 = 0 & y_3 = -2\ell\varepsilon_{35} \\
x_4 = \ell\,\varepsilon_{45} & y_4 = \ell\,(\varepsilon_{34} - 2\varepsilon_{35}) \\
x_5 = 0 & y_5 = 0
\end{array}
$$

avec la condition de compatibilité :

$\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{15} - \varepsilon_{23}$

Cette condition peut aisément s'exprimer en termes de contraintes. Pour cela, il suffit d'utiliser la loi de comportement en élasticité linéaire qui dit que $T_{ij} = E_{ij} S_{ij} \varepsilon_{ij}$. Dans notre cas toutes les barres ont même section S, les barres A_1A_2 et A_2A_3 ont même module d'Young E, le module d'Young de la barre A_1A_5 est de $\sqrt{2}\,E$ on aura donc :

$T_{12} = \sqrt{2}\,T_{15} - T_{23}$

4. Système statique.

Le système statique est obtenu en écrivant les équations d'équilibre de chacun des noeuds du treillis :

On ne cherche à calculer que les tensions qui règnent dans les barres. Pour cela, on projette les équations vectorielles d'équilibre des noeuds uniquement dans la direction de mobilité des noeuds. A ces équations, on n'oubliera pas d'ajouter la condition de compatibilité obtenue précédemment. Il vient alors :

$$\left\| \begin{array}{l} T_{12} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, T_{15} = F \\ -T_{12} + T_{23} = -F \\ T_{25} = F \\ T_{34} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, T_{35} = \sqrt{2} F \\ -T_{45} = F \\ T_{34} = F \\ \\ \text{avec } T_{12} = \sqrt{2}\, T_{15} - T_{23} \end{array} \right. \qquad \left\| \begin{array}{lll} T_{12} = \dfrac{3}{4}\, F & & \text{traction} \\ T_{15} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\, F & & \text{traction} \\ T_{23} = -\dfrac{F}{4} & & \text{compression} \\ T_{25} = F & & \text{traction} \\ T_{34} = F & & \text{traction} \\ T_{35} = (2 - \sqrt{2})\, F & & \text{traction} \\ T_{45} = -F & & \text{compression} \end{array} \right.$$

5. Déplacements

Pour exprimer les déplacements en fonction des efforts exercés sur les barres, on utilise à nouveau la loi de comportement en élasticité linéaire : $T_{ij} = E_{ij}\, S\, \varepsilon_{ij}$. On obtient :

$$u_1 = \frac{F\ell}{4ES} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \frac{F\ell}{4ES} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{F\ell}{ES} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_4 = \frac{F\ell}{ES} \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} - 3 \end{pmatrix}$$