Exercice 2

Dans le repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point $A(1,1,1)$.

On considère un torseur $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{u}(P) \end{bmatrix}_{\mathcal{P}}$ qui satisfait $\vec{u}(A) = \vec{u}(O)$

1. Montrer que $\forall B$ tel que (O,A,B) soient alignés, on a $\vec{u}(B) = \vec{u}(O)$

2. On suppose que $\forall P \in (O,\vec{i},\vec{j})$ on a $\vec{u}(P)\,.\,\vec{i} = \vec{u}(O)\,.\,\vec{i} - \overrightarrow{OP}\,.\,\vec{j}$

Déterminer $\vec{u}$ en tout point de l'espace. Calculer la résultante et l'axe central de $\mathcal{T}$

1. Si (O,A,B) sont alignés $\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$ $\qquad \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}(A) = \vec{u}(O) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OA}$

si $\vec{u}(A) = \vec{u}(O) \Rightarrow \vec{R}\wedge\overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow \vec{R}\,//\,\overrightarrow{OA} \Rightarrow \vec{R} = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$

$\vec{u}(B) = \vec{u}(O) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OB} = \vec{u}(O) + \vec{R}\wedge(\lambda\overrightarrow{OA}) = \vec{u}(O) + \lambda\vec{R}\wedge\overrightarrow{OA} = \vec{u}(O)$

2. $\vec{u}(P) = \vec{u}(O) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}$

si $P \in P(O,\vec{i},\vec{j})$ alors $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP} = \alpha\begin{pmatrix}-y\\x\\y-x\end{pmatrix}$

$\vec{u}(P).\vec{i} = \vec{u}(O).\vec{i} + (\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}).\vec{i} = u(O).\vec{i} - \overrightarrow{OP}.\vec{j}$

on déduit $-\alpha y = -y \Rightarrow \alpha = 1$

ainsi $\vec{R} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ on pose $\vec{u}(O) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

alors $\forall M \in \mathcal{E}$ $\vec{u}(M) = u(O) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{u}(M) = \begin{pmatrix}\alpha+z-y\\\beta+x-z\\\gamma+y-x\end{pmatrix}$

$\Delta = \{P\in\mathcal{E}\,;\ \vec{R}\wedge\vec{u}(P) = 0\}$

$\vec{R}\wedge\vec{u}(P) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha+z-y\\\beta+x-z\\\gamma+y-x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma-\beta-2x+y+z\\\alpha-\gamma+x-2y+z\\\beta-\alpha+x+y-2z\end{pmatrix} = 0$

Ce qui donne l'équation d'une droite qui doit être parallèle à $\vec{R}$

Feuille intercalaire N° ....