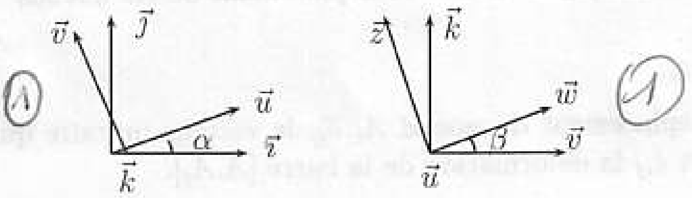
MECANIQUE STATIQUE
Examen de Juin 2009

Exercice : Produit scalaire - produit vectoriel (13 points)

Soient $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ et $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$, trois bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ telles que : 2 - $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ est déduite de $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par une rotation d'angle α mesurée autour de $\vec{k}$

- $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ est déduite de $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ par une rotation d'angle β mesurée autour de $\vec{u}$



2. Calcul

21. $3\vec{u}\wedge 2\vec{v} = 6\vec{k}$ 1

22 $\vec{z}\wedge 2\vec{k} = -2\sin\beta\vec{u}$ 1

23. $(\vec{u}+\vec{j}).(\vec{k}-\vec{w}) = \vec{u}.\vec{k} - \vec{u}.\vec{w} + \vec{j}.\vec{k} - \vec{j}.\vec{w} = -\vec{j}.\vec{w} = -\cos\alpha\,\cos\beta$ 1

24. $\|\vec{z}+\vec{i}\|^2 = \|\vec{z}\|^2 + \|\vec{i}\|^2 + 2\vec{z}.\vec{i} = 2 + 2\sin\alpha\,\sin\beta$ 1

25. $\vec{k}\wedge(\vec{k}.\vec{z})$ impossible on ne peut pas calculer le produit vectoriel d'un vecteur et d'un scalaire 1

26. $(\vec{w}\wedge\vec{k})\wedge\vec{j} = \cos\beta\,\vec{u}\wedge\vec{j} = \cos\alpha\,\cos\beta\,\vec{k}$ 1

27. $\|2\vec{i}+\vec{u}\|^2 = \|2\vec{i}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + 2veci.\vec{u} = 4+1+4\cos\alpha = 5+4\cos\alpha$ 1

28 $(\vec{v}\wedge\vec{z}).\vec{i}2 = \cos\beta\,\vec{u}.\vec{i} = \cos\alpha\,\cos\beta$ 1

On considère le vecteur $\vec{U}$ défini par $\vec{U} = p\vec{u} + q\vec{k} + r\vec{z}$

3. Exprimer le vecteur $\vec{U}$ dans les bases B_o et B_1

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} p \\ -r\sin\beta \\ q + r\cos\beta \end{pmatrix}_{B_1} \quad 1{,}5 \qquad \vec{U} = \begin{pmatrix} p\cos\alpha + r\sin\alpha\sin\beta \\ p\sin\alpha - r\cos\alpha\sin\beta \\ q + r\cos\beta \end{pmatrix}_{B_o} \quad 1{,}5$$

Cours (7 points)

1. Un couple est un torseur dont la résultante est nulle 1

2. Un solide est en équilibre lorsque le torseur des efforts exercés sur ce solide est nul. 1
Un système de solides est en équilibre lorsque chaque solide de ce système est en équilibre 1

2 3. Le système statique dans un treillis est constitué de l'ensemble des équations d'équilibre de chacun des noeuds de ce treillis. 1

4. Pour construire le système cinématique d' un treillis, on écrit pour chacune des barres la relation qui lie sa déformation avec le déplacement de ses noeuds 0,5

$(\vec{u}_j - \vec{u}_i) . \vec{e}_{ij} = \ell_{ij}\, \varepsilon_{ij}$

où $\vec{u}_i$ désigne le deplacement du noeud A_i, $\vec{e}_{ij}$ le vecteur unitaire qui va du noeud Ai vers le noeud A_j et ε_{ij} la déformation de la barre $[A_iA_j]$. 0,5 0,5

5. La loi de comportement en élasticité linéaire traduit le fait que la déformation d'une barre est proportionnelle à la contrainte qu'elle subit : 0,5

$T_{ij} = E_{ij} S_{ij}\, \varepsilon_{ij}$

où E_{ij} et S_{ij} désignent le module d'2Young et la section de la barre $[A_iA_j]$. 0,5 0,5