Exercice 3

Relativement au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (avec $\vec{j}$ vertical ascendant), $\vec{g} = -g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur on considère un système Σ situé dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. Σ est constitué de deux solides homogènes :

- Un disque $\mathcal{D}$ de masse m, de rayon R et de centre C.
- Une tige $\mathcal{T}$ de masse M et de longueur ℓ.

$\mathcal{D}$ est astreint à rester en contact en un point I de l'axe $O\vec{i}$. On note $T\vec{i}+N\vec{j}$ la réaction du sol au point I

$\mathcal{T}$ est astreint à rester en contact en un point A de l'axe $O\vec{i}$. On note $Q\vec{i}+P\vec{j}$ la réaction du sol au point A

Les deux solides $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ restent en contact en un point J. On introduit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AJ} = x\vec{u}$ $(x>0)$ et $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ soit une base orthonormée directe. On note α l'angle $(\vec{i},\vec{u})$ mesuré autour de $\vec{k}$ et on pose $G\vec{u}+F\vec{v}$ la réaction du disque sur la tige au point J. On suppose que $\alpha \in]0,\frac{\pi}{2}[$

On suppose que les différents contacts ponctuels aux points I, J et A obéissent à une loi de Coulomb de même coefficient f

1. Montrer que $x = \dfrac{R(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$
2. Rappeler la condition d'équilibre d'un système de solides
3. Ecrire les équations d'équilibre de Σ. En déduire que $F = \dfrac{M\ell}{2x}g\cos\alpha$. Exprimer N,P,T,Q et G en fonction de F et de α.
4. Vérifier que le disque reste toujours en contact avec le sol au point I et avec la tige au point J. On suppose maintenant que $\ell = 4\sqrt{3}\,R$. Montrer que si $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ la tige va

décoller du sol au point A.

5. On a toujours $\ell = 4\sqrt{3}\,R$ mais cette fois çi $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Calculer F,N,P,T,Q et G. Montrer que $P<F<N$. En déduire que le point A risque de glisser le premier mais qu'aucun glissement ne pourra apparaître si $f > \dfrac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$.

Exercice 4

Dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, avec $O\vec{j}$ vertical ascendant, $\vec{g} = g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère un système Σ constitué de deux barres S_1 et S_2 homogènes de même masse m et de même longueur ℓ.

S_1 est d'extrémités O et A. On peut introduire $\vec{u}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{OA} = \ell\vec{u}$ et on note θ l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{u}$, (cf figure 1), on suppose $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$

S_2 est d'extrémités A et B. On peut introduire $\vec{Y}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{BA} = \ell\vec{Y}$.

La liaison entre S_1 et le bâti fixe modélisé par le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une liaison pivot parfaite d'axe $O\vec{k}$.

Les deux barres sont articulées au point A par une liaison pivot parfaite d'axe $A\vec{k}$.

Le point B est astreint à rester en contact **sans frottement** avec l'axe $O\vec{i}$.

De plus, on exerce sur la barre S_2, au point B une force $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}mg\,\vec{i}$.

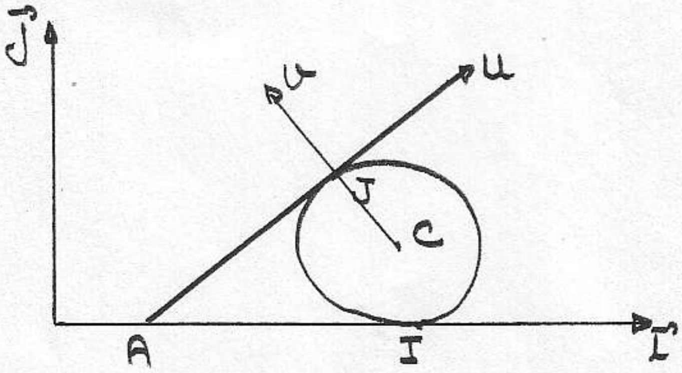
Ecrire les torseurs des efforts qui s'exercent sur S_2 et sur Σ. En déduire la position d'équilibre de Σ.

Exercice 5

On étudie l'équilibre d'un système Σ formé de deux solides $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$. Le solide $\mathcal{D}$ est un disque plan homogène de rayon R, de centre C, et de masse m. Le solide $\mathcal{B}$ est une

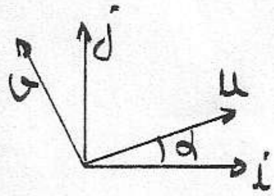
Mécanique statique
Q21 Juin 2001

I. Etude d'un équilibre



D : masse m, rayon R

T : masse M, longueur l



$\vec{AJ} = x\vec{u} \quad x > 0$

$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

1. Relation entre x et α

$\vec{AI} = \vec{AJ} + \vec{JC} + \vec{CI} = x\vec{u} - R\vec{v} - R\vec{J}$

la condition $\vec{AI}.\vec{J} = 0$ implique $x\sin\alpha - R\cos\alpha - R = 0$

soit finalement $\boxed{x = \dfrac{R(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}}$

2. Condition d'équilibre d'un système

Un système est en équilibre ssi chaque solide du système est en équilibre

$$\Sigma \text{ équilibre} \iff \left\| \begin{array}{l} \mathcal{T}_{eff}(D) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(T) = 0 \end{array} \right.$$

3. Equations d'équilibre

$$* \ \mathcal{T}_{eff}(D) = \begin{bmatrix} -mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} T\vec{I} + N\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} -G\vec{u} - F\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_J$$

$$\mathcal{T}_{eff}(D) = \begin{bmatrix} (T - G\cos\alpha + F\sin\alpha)\vec{I} + (N - mg - G\sin\alpha - F\cos\alpha)\vec{J} \\ R(T+G)\vec{K} \end{bmatrix}_C$$

$$* \ \mathcal{T}_{eff}(T) = \begin{bmatrix} -Mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} Q\vec{I} + P\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} G\vec{u} + F\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_J$$

$\cdot\ -Mg\vec{j}\wedge\vec{GA} = +Mg\vec{j}\wedge\frac{\ell}{2}\vec{u} = -\frac{M\ell}{2}g\cos\alpha\,\vec{k}$

$\cdot\ (G\vec{u}+F\vec{v})\wedge\vec{JA} = (G\vec{u}+F\vec{v})\wedge(-x\vec{u}) = Fx\vec{k}$

$$\mathcal{T}_{eff}(T) = \begin{bmatrix} (Q+G\cos\alpha - F\sin\alpha)\vec{i} + (P-Mg+G\sin\alpha+F\cos\alpha)\vec{j} \\ (Fx - \frac{M\ell}{2}g\cos\alpha)\vec{k} \end{bmatrix}_A$$

En écrivant les équations $\mathcal{T}_{eff}(D) = \mathcal{T}_{eff}(T) = 0$, il vient:

$$\left\| \begin{aligned} & T - G\cos\alpha + F\sin\alpha = 0 \\ & N - G\sin\alpha - F\cos\alpha = mg \\ & T + G = 0 \\ & Q + G\cos\alpha - F\sin\alpha = 0 \\ & P + G\sin\alpha + F\cos\alpha = Mg \\ & Fx - \frac{M\ell}{2}g\cos\alpha = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\| \begin{aligned} & F = \frac{M\ell}{2x}g\cos\alpha \\ & T = -F\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\ & G = Q = F\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\ & N = F + mg \\ & P = Mg - F \end{aligned} \right.$$

4- <u>On suppose $\ell = 4\sqrt{3}R$ - contact unilatéral</u>

$$\frac{\ell}{2x} = \frac{\ell\sin\alpha}{2R(1+\cos\alpha)} = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

on en déduit ensuite

* $F = 2\sqrt{3}Mg\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha} > 0 \quad \forall\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

A l'équilibre, le contact ne peut être rompu entre le disque et la tige

* $N = F + mg > 0 \quad \forall\alpha$ pas de perte de contact en I

* $P = Mg - F = Mg\left(1 - 2\sqrt{3}\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$

si $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $1+\cos\alpha = \dfrac{3}{2}$

$P = Mg\left(1 - \dfrac{3}{2}*\dfrac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow$ la tige perd le contact avec le sol au point A si $\alpha = \pi/3$

5. Loi de Coulomb $\quad l = 4\sqrt{3}R \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$* \; F = 2\sqrt{3}\, mg \frac{\frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3mg}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow F = 3(2-\sqrt{3})mg$$

$$* \; N = mg + F$$

$$* \; P = mg - F = mg(1 - 6 + 3\sqrt{3}) \Rightarrow P = mg(3\sqrt{3} - 5)$$

$$* \; |T| = |Q| = |G| = F\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = F * \frac{1/2}{1+\sqrt{3}/2} = \frac{F}{2+\sqrt{3}} = 3(2-\sqrt{3})^2 mg$$

on a alors $\quad P < F < N$

comme ici $|T| = |Q| = |G|$ on aura $\frac{|T|}{N} < \frac{|G|}{F} < \frac{|Q|}{P}$

Or la loi de Coulomb implique que si il n'y a pas de glissement $\frac{|\text{Tangent}|}{\text{Normal}} < f$

c'est donc le point A qui est susceptible de glisser le premier. On évitera tout glissement si $|Q| < fP$

soit

$$3(2-\sqrt{3})^2 mg < mfg(3\sqrt{3} - 5) \Rightarrow f > \frac{3(2-\sqrt{3})^2}{3\sqrt{3} - 5}$$

$$f > \frac{3(2-\sqrt{3})^2(3\sqrt{3}+5)}{27 - 25} = \frac{3}{2}(4 + 3 - 4\sqrt{3})(3\sqrt{3}+5)$$

$$f > \frac{3}{2}(35 - 36 + 21\sqrt{3} - 20\sqrt{3}) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

si $f > \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$ aucun glissement n'apparaitra ni au point A ni ailleurs.