**Exercice 2**

Une double-échelle se compose de deux échelles simples homogènes $(OA_1)$ et $(OA_2)$ de même longueur $\ell$ et de même masse $m$. On désignera par $G_1$ et $G_2$ leur centre de gravité.

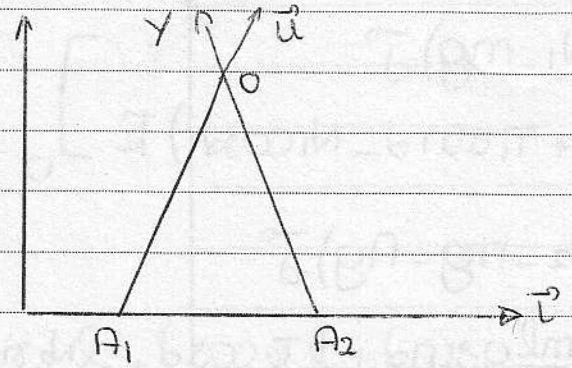
. Les deux échelles sont articulées en $O$ par une liaison pivot parfaite.

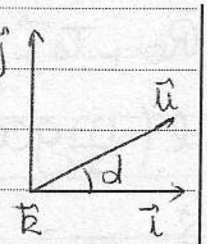
. Un individu de masse $M$ se trouve sur l'échelle $(OA_2)$. On suppose que son centre de gravité se situe en un point $P$ de $(OA_2)$ de telle sorte que l'action de l'homme sur l'échelle soit équivalente à une force ponctuelle $-Mg\vec{j}$ exercée en $P$. (On peut introduire $x > 0$ tel que $\overline{OP} = x$).

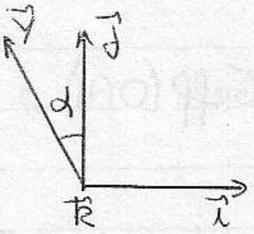
. Les pieds $A_1$ et $A_2$ de chacune des deux échelles sont en contact ponctuel avec le sol. On note respectivement $T_1\vec{i} + N_1\vec{j}$ et $T_2\vec{i} + N_2\vec{j}$ les réactions ponctuelles du sol sur $(OA_1)$ et $(OA_2)$ et on suppose que ces contacts sont décrits par une loi de Coulomb de même coefficient de frottement $f$.

1. Déterminer les composantes $T_1, N_1, T_2$ et $N_2$ des réactions aux appuis lorsque l'échelle est en équilibre.

2. Déterminer quel pied est susceptible de glisser en premier.




On introduit $\vec{u}$ et $\vec{y}$ les vecteurs unitaires tels que $\vec{A_1O} = \ell\vec{u}$ et $\vec{A_2O} = \ell\vec{y}$

on note $\alpha = (\vec{i}, \vec{u}) = (\vec{j}, \vec{y})$ mesuré autour de $\vec{k}$

$$\mathcal{T}_{eff}(\overline{OA_1}) = \underset{1}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_1}} + \underset{2}{\begin{bmatrix} T_1\vec{i} + N_1\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{A_1}} + \underset{3}{\begin{bmatrix} \vec{R_0} \\ \vec{\mathcal{M}}(O) \end{bmatrix}_{O}}$$

avec $\vec{\mathcal{M}}(O) \cdot \vec{k} = 0$

En fait $\vec{\mathcal{M}}(O) = 0$ car système situé dans le plan

$$\mathcal{T}_{eff}(\overline{OA_2}) = \underset{1'}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_2}} + \overset{2'}{\begin{bmatrix} T_2\vec{i} + N_2\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{A_2}} + \overset{3'}{\begin{bmatrix} -\vec{R_0} \\ 0 \end{bmatrix}_{O}} + \overset{4'}{\begin{bmatrix} -Mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{P}}$$

Pas sûr que le $\mathcal{T}_{eff}(\Sigma)$ présente un intérêt quelconque

on va garder $\mathcal{T}_{eff}(OA_1)$ et $\mathcal{T}_{eff}(OA_2)$ au point O à cause de la liaison pivot.

$$\mathcal{M}_1(O) = -mg\vec{j} \wedge \vec{G_1O} = -mg\vec{j} \wedge \frac{l}{2}\vec{u} = \frac{ml}{2}g\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$\mathcal{M}_2(O) = (T_1\vec{i} + N_1\vec{j}) \wedge \vec{A_1O} = (T_1\vec{i} + N_1\vec{j}) \wedge l\vec{u} = l\,(T_1\sin\alpha - N_1\cos\alpha)\vec{k}$$

$$\mathcal{M}_3(O) = 0$$

$$\mathcal{M}'_1(O) = -mg\vec{j} \wedge \vec{G_2O} = -mg\vec{j} \wedge \frac{l}{2}\vec{y} = -\frac{ml}{2}g\sin\alpha\,\vec{k}$$

$$\mathcal{M}'_2(O) = (T_2\vec{i} + N_2\vec{j}) \wedge l\vec{y} = l\,(T_2\cos\alpha + N_2\sin\alpha)\vec{k}$$

$$\mathcal{M}'_3(O) = 0$$

$$\mathcal{M}'_4(O) = +ng\vec{j} \wedge x\vec{y} = ngx\sin\alpha\,\vec{k}$$

Finalement

$$\mathcal{T}_{eff}(OA_1) = \begin{bmatrix} \vec{R_0} + T_1\vec{i} + (N_1 - mg)\vec{j} \\ l\left(\frac{m}{2}g\cos\alpha + T_1\sin\alpha - N_1\cos\alpha\right)\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

$$\mathcal{T}_{eff}(OA_2) = \begin{bmatrix} -\vec{R_0} + T_2\vec{i} + (N_2 - mg - ng)\vec{j} \\ \left(ngx\sin\alpha - \frac{ml}{2}g\sin\alpha + lT_2\cos\alpha + lN_2\sin\alpha\right)\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \vec{R_0} + T_1\vec{i} + (N_1 - mg)\vec{j} = 0 \\ \frac{m}{2}g\cos\alpha + T_1\sin\alpha - N_1\cos\alpha = 0 \\ -\vec{R_0} + T_2\vec{i} + (N_2 - mg - ng)\vec{j} = 0 \\ ngx\sin\alpha - \frac{ml}{2}g\sin\alpha + lT_2\cos\alpha + lN_2\sin\alpha = 0 \end{array} \right.$$

on a perdu l'équivalence en se désintéressant de $\vec{R_0}$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Rightarrow \left\| \begin{array}{ll} T_1 + T_2 = 0 & (1) \\ N_1 + N_2 = 2mg + ng & (2) \\ N_1\cos\alpha - T_1\sin\alpha = \frac{m}{2}g\cos\alpha & (3) \\ N_2\sin\alpha + T_2\cos\alpha = \frac{m}{2}g\sin\alpha - ng\frac{x}{l}\sin\alpha & (4) \end{array} \right.$$

$(1) \Rightarrow T_2 = -T_1$ $\qquad$ $(2) \Rightarrow N_2 = (2m + n)g - N_1$

$$(3) \Rightarrow T_1 = N_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{m}{2}g\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Feuille intercalaire N° ........

$$(4) \Rightarrow (2m+M)g\sin\alpha - N_1\sin\alpha - N_1\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \frac{m}{2}g\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{m}{2}g\sin\alpha - Mg\frac{x}{\ell}\sin\alpha$$

$$N_1 = (2m+M)g\sin^2\alpha + \frac{m}{2}g\cos^2\alpha - \frac{m}{2}g\sin^2\alpha + Mg\frac{x}{\ell}\sin^2\alpha$$

$$N_1 = \frac{m}{\cancel{2}}g + \left(M + \frac{m}{2} + M\frac{x}{\ell}\right)g\sin^2\alpha$$

on déduit alors

$$N_1 = mg + \left(M + \frac{m}{2} + M\frac{x}{\ell}\right)g\sin^2\alpha$$

$$N_2 = (M+m)g - \left(M + \frac{m}{2} + M\frac{x}{\ell}\right)g\sin^2\alpha$$

$$T_1 = \frac{m}{2}g\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cancel{4} + \left(M + \frac{m}{2} + \frac{Mx}{\ell}\right)g\cos\alpha\sin\alpha$$

$$T_2 = -\frac{m}{2}g\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \left(M + \frac{m}{2} + \frac{Mx}{\ell}\right)g\cos\alpha\sin\alpha$$

La loi de Coulomb stipule que $|T_i| < f N_i$ $(i=1,2)$
soit

$$\frac{|T_i|}{N_i} < f$$

Le pied susceptible de glisser le premier est celui pour lequel le rapport $\frac{|T_i|}{N_i}$ est le plus grand

$$\frac{|T_1|}{N_1} - \frac{|T_2|}{N_2} = |T_1|\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right) = |T_1|\left(\frac{N_2 - N_1}{N_1 N_2}\right)$$

Etudier le signe de $\frac{|T_1|}{N_1} - \frac{|T_2|}{N_2}$ revient à étudier celui de $N_2 - N_1$

$$N_2 - N_1 = Mg - 2\left(M + \frac{m}{2} + \frac{Mx}{\ell}\right)g\sin^2\alpha$$