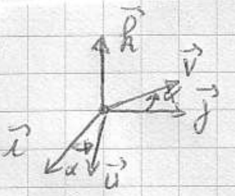
PRODUITS SCALAIRE ET VECTORIEL

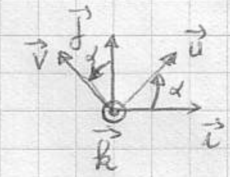
Exercice 5

Soient $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ et $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$, trois bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ telles que :

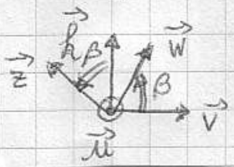
- $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ est déduite de $B_o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par une rotation d'angle α mesurée autour de $\vec{k}$
- $B_2(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$, est déduite de $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ par une rotation d'angle β mesurée autour de $\vec{u}$



$\Longleftrightarrow$



On peut écrire $\begin{cases} \vec{u} = \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j} \\ \vec{v} = -\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \vec{i} = \cos\alpha\, \vec{u} - \sin\alpha\, \vec{v} \\ \vec{j} = +\sin\alpha\, \vec{u} + \cos\alpha\, \vec{v} \end{cases}$



On peut écrire : $\begin{cases} \vec{w} = \cos\beta\, \vec{v} + \sin\beta\, \vec{k} \\ \vec{z} = -\sin\beta\, \vec{v} + \cos\beta\, \vec{k} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \vec{v} = \cos\beta\, \vec{w} - \sin\beta\, \vec{z} \\ \vec{k} = \sin\beta\, \vec{w} + \cos\beta\, \vec{z} \end{cases}$

1. Calculer

$\vec{i}\wedge\vec{j}$ $\quad \vec{v}\wedge\vec{u}$ $\quad \vec{u}\wedge\vec{z}$ $\quad \vec{i}.(\vec{k}\wedge\vec{u})$ $\quad \vec{i}.(\vec{k}\wedge\vec{j})$ $\quad \vec{j}.(\vec{k}\wedge\vec{u})$

$(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge(\vec{k}\wedge i)$ $\quad (\vec{w}\wedge\vec{u}).\vec{k}$ $\quad (\vec{z}\wedge\vec{w})\wedge(\vec{j}\wedge i)$

$\vec{v}\wedge\vec{j}$ $\quad \vec{w}\wedge\vec{v}$ $\quad \vec{z}\wedge\vec{k}$ $\quad \vec{j}\wedge\vec{w}$ $\quad \vec{z}\wedge\vec{i}$

$(\vec{v}\wedge\vec{j}).\vec{z}$ $\quad (\vec{k}\wedge\vec{w})\wedge\vec{j}$ $\quad (\vec{v}\wedge\vec{z})\wedge(\vec{j}\wedge\vec{u})$ $\quad (\vec{k}\wedge\vec{u}).\vec{j}$ $\quad (\vec{j}\wedge\vec{z}).(\vec{k}\wedge\vec{w})$

$\vec{i}\wedge\vec{j} = \boxed{\vec{k}}$; $\vec{v}\wedge\vec{u} = \boxed{-\vec{k}}$ $\quad \vec{u}\wedge\vec{z} = \boxed{-\vec{w}}$ $\quad \vec{i}.\underbrace{(\vec{k}\wedge\vec{u})}_{\vec{v}} = \boxed{-\sin\alpha}$ $\quad \vec{j}.\underbrace{(\vec{k}\wedge\vec{u})}_{\vec{v}} = \boxed{\cos\alpha}$

$\vec{i}.\underbrace{(\vec{k}\wedge\vec{j})}_{-\vec{i}} = \boxed{-1}$ $\quad \underbrace{(\vec{i}\wedge\vec{j})}_{\vec{k}}\wedge\underbrace{(\vec{k}\wedge\vec{i})}_{\vec{j}} = \boxed{-\vec{i}}$ $\quad \underbrace{(\vec{w}\wedge\vec{u})}_{-\vec{z}}.\vec{k} = \boxed{-\cos\beta}$

$\underbrace{(\vec{z}\wedge\vec{w})}_{-\vec{u}}\wedge\underbrace{(\vec{j}\wedge\vec{i})}_{-\vec{k}} = \boxed{-\vec{v}}$ $\quad \vec{v}\wedge\vec{j} = \boxed{-\sin\alpha\,\vec{k}}$ $\quad \vec{w}\wedge\vec{v} = \boxed{-\sin\beta\,\vec{u}}$ $\quad \vec{z}\wedge\vec{k} = \boxed{-\sin\beta\,\vec{u}}$

$\vec{j}\wedge\vec{w} = \vec{j}\wedge(\cos\beta\,\vec{v} + \sin\beta\,\vec{k}) = \cos\beta(\vec{j}\wedge\vec{v}) + \sin\beta(\vec{j}\wedge\vec{k}) = \boxed{\sin\alpha\cos\beta\,\vec{k} + \sin\beta\,\vec{i}}$

ou $= (\sin\alpha\,\vec{u} + \cos\alpha\,\vec{v})\wedge\vec{w} = \sin\alpha\,\vec{u}\wedge\vec{w} + \cos\alpha\,\vec{v}\wedge\vec{w} = \boxed{\sin\alpha\,\vec{z} + \cos\alpha\sin\beta\,\vec{u}}$ (*)

((*) si on exprime $\vec{z}$ en fonction de $\vec{v}$ et $\vec{k}$ puis $\vec{v}$ et $\vec{u}$ en fonction de $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, on retombe sur la 1ère expression)

$\vec{z}\wedge\vec{i} = [-\sin\beta\,\vec{v} + \cos\beta\,\vec{k}]\wedge\vec{i} = \boxed{\cos\alpha\sin\beta\,\vec{k} + \cos\beta\,\vec{j}}$ (*)

ou $= \vec{z}\wedge(\cos\alpha\,\vec{u} - \sin\alpha\,\vec{v}) = \boxed{\cos\alpha\,\vec{w} + \sin\alpha\cos\beta\,\vec{u}}$

$\underbrace{(\vec{v}\wedge\vec{j})}_{-\sin\alpha\,\vec{k}}.\vec{z} = \boxed{-\sin\alpha\cos\beta}$ $\quad \underbrace{(\vec{k}\wedge\vec{w})}_{-\cos\beta\,\vec{u}}\wedge\vec{j} = \boxed{-\cos\beta\cos\alpha\,\vec{k}}$ $\quad \underbrace{(\vec{v}\wedge\vec{z})}_{\cos\beta\,\vec{u}}\wedge\underbrace{(\vec{j}\wedge\vec{u})}_{-\cos\alpha\,\vec{k}} = \boxed{\cos\alpha\cos\beta\,\vec{v}}$

$\underbrace{(\vec{k}\wedge\vec{u})}_{\vec{v}}.\vec{j} = \boxed{\cos\alpha}$ $\quad (\vec{j}\wedge\vec{z}).\underbrace{(\vec{k}\wedge\vec{w})}_{-\vec{u}\cos\beta} = \vec{j}\wedge(-\sin\beta\,\vec{v} + \cos\beta\,\vec{k}).(-\cos\beta\,\vec{u})$

$= (\sin\beta\sin\alpha\,\vec{k} + \cos\beta\,\vec{i}).(-\vec{u}\cos\beta)$

$= \boxed{-\cos^2\beta\cos\alpha}$

On considère le vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$\vec{U} = p\vec{u} + q\vec{k} + r\vec{z}$

ATTENTION $(\vec{u},\vec{z},\vec{k})$ ne constituent pas une base orthonormée $\Rightarrow$ p, q et r ne sont pas les composantes de $\vec{U}$ $\Longleftrightarrow$ $\vec{U}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{z}$ et $\vec{k}$ simplement ...

2. Calculer

$\vec v \wedge \vec U \qquad \vec w \wedge \vec U \qquad \vec k \wedge \vec U \qquad (\vec U \wedge \vec k).\vec u \qquad (\vec U \wedge \vec k).\vec v$

$$\vec v \wedge \vec U = \vec v \wedge (p\vec u + q\vec k + r\vec z) = p\underbrace{\vec v\wedge\vec u}_{-\vec k} + q\underbrace{\vec v\wedge\vec k}_{\vec u} + r\underbrace{\vec v\wedge\vec z}_{\cos\beta\,\vec u} = \boxed{-p\vec k + (q + r\cos\beta)\vec u}$$

$\vec w \wedge \vec U = \boxed{-p\vec z + (r + q\cos\beta)\vec u}$ $\quad \vec k \wedge \vec U = \boxed{p\vec v + r\sin\beta\,\vec u} \Leftrightarrow \vec U \wedge \vec k = -p\vec v - r\sin\beta\,\vec u$

$\Rightarrow (\vec U \wedge \vec k).\vec u = \boxed{-r\sin\beta}$ et $(\vec U \wedge \vec k).\vec v = \boxed{-p}$

3. Calculer quand c'est possible

$3\vec k \wedge \vec v \qquad \vec w \wedge 2\vec k \qquad \|\vec w + \vec j\|^2 \qquad (\vec u + \vec i).(\vec z + \vec v)$

$\vec k \wedge (\vec i.\vec z) \qquad (\vec v \wedge \vec w) \wedge \vec i \qquad \|2\vec k + \vec z\|^2 \qquad (\vec v \wedge \vec z).\vec i$

$\vec v \wedge (\vec k \wedge \vec u) \qquad (\vec z + \vec i).(\vec k - \vec z)$

$(2\vec i + 3\vec u) \wedge (2\vec w - 3\vec z) \qquad \|2\vec i + \vec u\|^2 \qquad (\vec j + 2\vec k).(\vec w - 2\vec z)$

$3\vec k \wedge \vec v = \boxed{-3\vec u}$ $\quad \vec w \wedge 2\vec k = 2\vec w \wedge \vec k = \boxed{2\cos\beta\,\vec u}$ $\quad \|\vec w + \vec j\|^2 = \underbrace{\|\vec w\|^2}_{1} + \underbrace{\|\vec j\|^2}_{1} + 2\vec w.\vec j$

et $\vec w.\vec j = (\cos\beta\,\vec v + \sin\beta\,\vec k).\vec j = \cos\beta\cos\alpha \Rightarrow \|\vec w + \vec j\|^2 = \boxed{2 + 2\cos\beta\cos\alpha}$

(ou) $\vec w.\vec j = \vec w.(\sin\alpha\,\vec u + \cos\alpha\,\vec v) = \cos\alpha\cos\beta.$

$$(\vec u + \vec i).(\vec z + \vec v) = \underbrace{\vec u.\vec z}_{\sin\beta} + \underbrace{\vec u.\vec v}_{0} + \vec i.\vec z + \underbrace{\vec i.\vec v}_{-\sin\alpha} = \sin\beta - \sin\alpha + \vec i.(-\sin\beta\,\vec v + \cos\beta\,\vec k)$$

(ou) $(\cos\alpha\,\vec u - \sin\alpha\,\vec v).\vec z$

$$= \boxed{\sin\beta - \sin\alpha + \sin\beta\sin\alpha}$$

$\vec k \wedge (\vec i.\vec z)$ = impossible car $\vec i.\vec z$ est un scalaire

$(\vec v \wedge \vec w) \wedge \vec i = \sin\beta\,\vec u \wedge \vec i = \boxed{-\sin\alpha\sin\beta\,\vec k}$

$\|2\vec k + \vec z\|^2 = 4\|\vec k\|^2 + \|\vec z\|^2 + 4\vec k.\vec z = \boxed{5 + 4\cos\beta}$

$(\vec v \wedge \vec z).\vec i = \cos\beta\,\vec u.\vec i = \boxed{\cos\alpha\cos\beta}$

$\vec v \wedge (\vec k \wedge \vec u) = \vec v \wedge \vec v = \boxed{\vec 0}$

$$(\vec z + \vec i).(\vec k - \vec z) = \underbrace{\vec z.\vec k}_{\cos\beta} - \underbrace{\vec z.\vec z}_{1} + \underbrace{\vec i.\vec k}_{0} - \underbrace{\vec i.\vec z}_{\sin\alpha\sin\beta} = \boxed{\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - 1}$$

$$(2\vec i + 3\vec u) \wedge (2\vec w - 3\vec z) = \underbrace{2\vec i \wedge 2\vec w}_{4\vec i \wedge \vec w} + \underbrace{3\vec u \wedge 2\vec w}_{6\vec z} - \underbrace{2\vec i \wedge 3\vec z}_{-6\vec i \wedge \vec z} - \underbrace{9\vec u \wedge \vec z}_{-\vec w} = 6\vec z + 9\vec w + 4\vec i \wedge \vec w - 6\vec i \wedge \vec z$$

Or $\vec i = \cos\alpha\,\vec u - \sin\alpha\,\vec v \Rightarrow \vec i \wedge \vec w = \cos\alpha\,\vec z - \sin\alpha\sin\beta\,\vec u$ et $\vec i \wedge \vec z = \cos\alpha\,\vec w - \sin\alpha\cos\beta\,\vec u$

D'où $(2\vec i + 3\vec u) \wedge (2\vec w - 3\vec z) = \boxed{(6 + 4\cos\alpha)\vec z + (9 + 6\cos\alpha)\vec w + 2\sin\alpha(3\cos\beta - 2\sin\beta)\vec u}$

NB : c'est une des expressions possibles !

$\|2\vec i + \vec u\|^2 = 4\|\vec i\|^2 + \|\vec u\|^2 + 4\vec i.\vec u = \boxed{5 + 4\cos\alpha}$ $\quad (\vec j + 2\vec k).(\vec w - 2\vec z) = (\vec j + 2\vec k).[(\cos\beta + 2\sin\beta)\vec v + (\sin\beta - 2\cos\beta)\vec k]$

$\Rightarrow (\vec j + 2\vec k).(\vec w - 2\vec z) = \boxed{(\cos\beta + 2\sin\beta)\cos\alpha + 2\sin\beta - 4\cos\beta}$

PRODUITS SCALAIRE ET VECTORIEL. Exercice 5 (fin)

4. Exprimer le vecteur $\vec{U}$ dans les trois bases B_o, B_1 et B_2

$$\vec{U} = p\vec{u} + q\vec{k} + r\vec{z}.$$

Pour exprimer $\vec{U}$ ds les différentes bases, on utilise les relations donnant les coordonnées des vecteurs de base ds une autre base.

<u>Dans la base B_o</u> : $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, on exprime $\vec{u}$ et $\vec{z}$ ds B_o.

$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$; $\vec{z} = -\sin\beta\,\vec{v} + \cos\beta\,\vec{k}$ et $\vec{v} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} \Rightarrow$

$$\vec{z} = -\sin\beta(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}) + \cos\beta\,\vec{k} = \sin\alpha\sin\beta\,\vec{i} - \sin\beta\cos\alpha\,\vec{j} + \cos\beta\,\vec{k}$$

D'où : $\vec{U} = p\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\sin\alpha\sin\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}p\cos\alpha + r\sin\alpha\sin\beta\\ p\sin\alpha - r\cos\alpha\sin\beta\\ q + r\cos\beta\end{pmatrix}}$

<u>Dans la base B_1</u> : $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\}$ on exprime $\vec{z} = -\sin\beta\,\vec{v} + \cos\beta\,\vec{k}$

Alors $\vec{U} = p\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\ -\sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix} = \boxed{p\,\vec{u} - r\sin\beta\,\vec{v} + (q + r\cos\beta)\,\vec{k}}$

Dans la base B_2 : $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\}$, il faut exprimer $\vec{k} = \sin\beta\,\vec{w} + \cos\beta\,\vec{z}$

Alors $\vec{U} = p\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}0\\ \sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \boxed{p\,\vec{u} + q\sin\beta\,\vec{w} + (r + q\cos\beta)\,\vec{z}}$