Exercice 2

Dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, avec $\vec{\jmath}$ vertical ascendant, $\vec{g}=-g\vec{\jmath}$ désigne l'accélération de la pesanteur, on considère S un disque homogène de masse m. Ce disque est posé sur un axe $O\vec{u}$ incliné d'un angle α par rapport à l'axe horizontal $O\vec{\imath}$. On note I le point de contact entre le disque et l'axe $O\vec{u}$

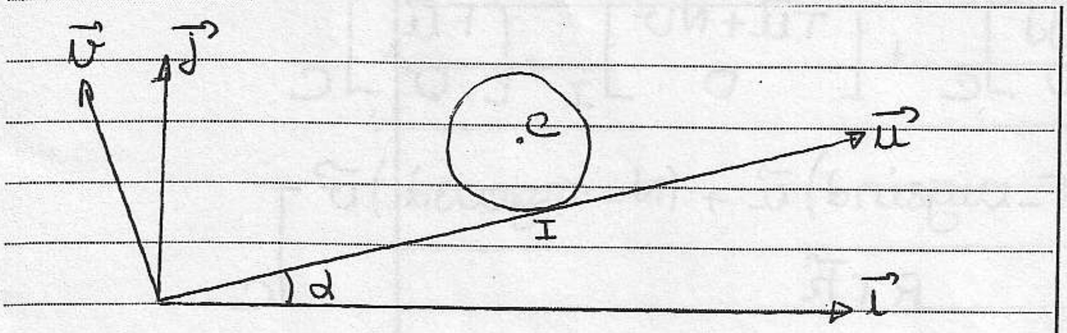
1. Montrer qu'aucun équilibre n'est possible si le disque est homogène

2. On exerce au point C une force ponctuelle $F\vec{u}$. Quelle doit être l'intensité de F pour que $\alpha=\frac{\pi}{6}$ soit compatible avec l'équilibre de S

3.On suppose que le disque n'est plus homogène et que son centre de gravité A est tel que : $\overrightarrow{CA}=R(\cos\theta\,\vec{\imath}+\ \sin\theta\,\vec{\jmath})$.

On exerce au point A une force $\vec{T}=\frac{\cancel{M}\ m}{2}g\,\vec{u}$ et on suppose que le contact en I a lieu sans frottement.

Déterminer les valeurs de α et de θ pour que S soit à l'équilibre.



On introduit $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ soit orthonormée directe

1. On va supposer $\alpha \neq 0$ car un plan incliné d'un angle nul perd pas mal de crédibilité.

$$\mathcal{T}_{eff}(S)=\begin{bmatrix}-mg\vec{\jmath}\\0\end{bmatrix}_C+\begin{bmatrix}T\vec{u}+N\vec{v}\\0\end{bmatrix}_I$$
(1) (2)

Le choix d'exprimer ce torseur en C ou en I est indifférent et laissé à la sensibilité de chacun) NON choix de C à cause de la question 2)
Allez on opte pour C

$\vec{\mathcal{M}}_1(C)=0$

$\vec{\mathcal{M}}_2(C)=\vec{\mathcal{M}}_2(I)+\vec{R}_2\wedge\vec{IC}=(T\vec{u}+N\vec{v})\wedge R\vec{v}=RT\vec{k}$

On a alors

$$\mathcal{T}_{eff}(S)=\begin{bmatrix}(T-mg\sin\alpha)\vec{u}+(N-mg\cos\alpha)\vec{v}\\RT\vec{k}\end{bmatrix}_C$$

Feuille intercalaire N° ....

$$S \text{ équilibre} \Leftrightarrow \mathcal{T}_{eff}(S) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \\ T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 0 \\ \alpha = 0 \\ N = mg \end{cases}$$

($N > 0$: contact unilatéral)

On a supposé $\alpha \neq 0$, il ne peut donc pas y avoir d'équilibre dans ce genre de situation.

2. On rajoute une force au point C

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} T\vec{u} + N\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} F\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} (T + F - mg\sin\alpha)\vec{u} + (N - mg\cos\alpha)\vec{v} \\ RT\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

$$S \text{ équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 0 \\ F = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ assure l'équilibre de $S \Rightarrow \begin{cases} T = 0 \\ F = \frac{m}{2}g \\ N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \end{cases}$

3. C n'est plus le centre de gravité de S et le disque ne frotte plus sur le sol

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} N\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} \frac{m}{2}g\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

Pour une raison évidente, c'est en A qu'on va exprimer ce torseur

$$\vec{\mathcal{M}}_2(A) = \vec{\mathcal{M}}_2(I) + \vec{R}_2 \wedge \vec{IA} = N\vec{v} \wedge (\vec{IC} + \vec{CA}) = N\vec{v} \wedge R(\vec{v} + \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_2(A) = RN(-\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\vec{k} = -RN\cos(\theta - \alpha)\vec{k}$$

$$\mathcal{C}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} g(1 - 2\sin\alpha)\vec{u} + (N - mg\cos\alpha)\vec{v} \\ - R N \cos(\theta - \alpha)\vec{k} \end{bmatrix}_A$$

$$S \text{ équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin\alpha = 0 & (1) \\ N = mg\cos\alpha & (2) \\ N\cos(\theta - \alpha) = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$

$(2) \Rightarrow N = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} mg$

La condition de contact unilatéral, $N > 0$ impose
$\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $N = \frac{\sqrt{3}}{2} mg$

$(3) \Rightarrow \cos(\theta - \alpha) = 0 \Rightarrow \theta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = \alpha \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$

A noter que le résultat est indépendant de R
$\Rightarrow$ tout point du diamètre II' (tel que $\theta = -\frac{\pi}{3}$) où se situerait le centre de gravité conduirait à l'équilibre de S