

Treillis 1

Dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère le treillis élastique plan schématisé ci-dessous.

Le noeud A_3 est fixe, les noeuds A_1 et A_2 sont en appui mobile dans la direction \vec{i} , et le noeud A_4 est libre.

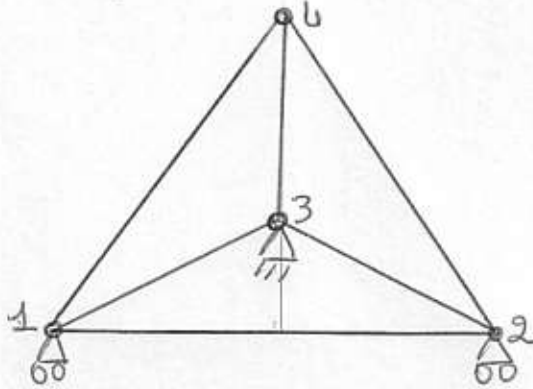
Les barres $[A_1A_3]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$ sont de longueur ℓ , les barres $[A_1A_2]$, $[A_1A_4]$ et $[A_2A_4]$ de longueur $\sqrt{3}\ell$.

Toutes les barres ont la même section S . On note E le module d'Young des barres $[A_1A_3]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$, $\sqrt{3}E$ celui des barres $[A_1A_4]$ et $[A_2A_4]$ et enfin $\frac{\sqrt{3}}{4}E$ le module d'Young de la barre $[A_1A_2]$.

On exerce :

- une charge $-2F\vec{i}$ au noeud A_1 ,
- une charge $F\vec{i}$ au noeud A_2 ,
- une charge $-\sqrt{3}F\vec{j}$ au noeud A_4 ,

On note \vec{e}_{ij} le vecteur unitaire qui va du noeud A_i au noeud A_j . T_{ij} désigne la tension qui règne dans la barre A_iA_j . Dans cet exercice on ne cherchera pas à calculer les réactions aux appuis.



1. Ce treillis est constitué de 4 noeuds, soit 8 équations statiques. Quant aux inconnues : Il y a 6 barres (soit 6 tensions) 1 appui fixe (2 inconnues) et 2 appuis mobiles (2×1 inconnue). Le système statique est alors un système de 8 équations à 10 inconnues. Ce treillis est donc hyperstatique de degré 2.

2. Vecteurs unitaires intervenants par la suite

Si on note \vec{e}_{ij} le vecteur unitaire orienté du noeud A_i vers le noeud A_j , on aura :

$$\vec{e}_{12} = \vec{i} \quad \vec{e}_{13} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}) \quad \vec{e}_{14} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{e}_{34} = \vec{j} \quad \vec{e}_{23} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}) \quad \vec{e}_{24} = \frac{1}{2}(-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

3. Système cinématique

Pour chacune des barres du treillis on écrit la relation qui unit les déplacements des noeuds à la déformation des barres : $(\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{e}_{ij} = \ell_{ij} \varepsilon_{ij}$

Sachant que :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = 0 \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

on aura :

$$\text{Barre } [1, 2] \implies (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{i} = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{12} \implies x_2 - x_1 = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{12}$$

$$\text{Barre } [1, 3] \implies \frac{1}{2}(\vec{u}_3 - \vec{u}_1) \cdot (\sqrt{3} \vec{i} + \vec{j}) = \ell \varepsilon_{13} \implies x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \ell \varepsilon_{13}$$

$$\text{Barre } [1, 4] \implies \frac{1}{2}(\vec{u}_4 - \vec{u}_1) \cdot (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}) = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{14} \implies x_4 - x_1 + \sqrt{3} y_4 = 2\sqrt{3} \ell \varepsilon_{14}$$

$$\text{Barre } [2, 3] \implies \frac{1}{2}(\vec{u}_3 - \vec{u}_2) \cdot (-\sqrt{3} \vec{i} + \vec{j}) = \ell \varepsilon_{23} \implies x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ell \varepsilon_{23}$$

$$\text{Barre } [2, 4] \implies \frac{1}{2}(\vec{u}_4 - \vec{u}_2) \cdot (-\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}) = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{24} \implies x_2 - x_4 + \sqrt{3} y_4 = 2\sqrt{3} \ell \varepsilon_{24}$$

$$\text{Barre } [3, 4] \implies (\vec{u}_4 - \vec{u}_3) \cdot \vec{j} = \ell \varepsilon_{34} \implies y_4 = \ell \varepsilon_{34}$$

On déduit de ce système que :

$$x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \ell \varepsilon_{13} \quad x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ell \varepsilon_{23}$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell (6\varepsilon_{14} - 2\varepsilon_{13} - 3\varepsilon_{34}) \quad y_4 = \ell \varepsilon_{34}$$

avec les conditions de compatibilité :

$$\begin{cases} (4) - (2) = (1) \implies 2\varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{23} = 3\varepsilon_{12} \\ (3) + (5) \implies \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{34} = 2\varepsilon_{14} + 2\varepsilon_{24} \end{cases}$$

Ces conditions peuvent aisément s'exprimer en termes de contraintes. Pour cela, il suffit d'utiliser la loi de comportement en élasticité linéaire qui dit que $T_{ij} = E_{ij} S_{ij} \varepsilon_{ij}$. Dans

notre cas $E_{14} = E_{24} = \sqrt{3} E$ $E_{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} E$ et $E_{ij} = E$ dans les autres cas, on aura ainsi, en multipliant chacune des équations par ES :

$$\begin{cases} ES(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}) = \frac{3}{2} ES \varepsilon_{12} \\ ES(\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{34}) = 2ES(\varepsilon_{14} + \varepsilon_{24}) \end{cases} \implies \begin{cases} (i) & T_{13} + T_{23} = 2\sqrt{3} T_{12} \\ (ii) & 2T_{12} + \sqrt{3} T_{34} = T_{14} + T_{24} \end{cases}$$

4. Système statique

Le système statique est obtenu en écrivant les équations d'équilibre de chacun des noeuds du treillis :

$$T_{12} \vec{e}_{12} + T_{13} \vec{e}_{13} + T_{14} \vec{e}_{14} - 2F \vec{i} + R_1 \vec{j} = \vec{0}$$

$$T_{12} \vec{e}_{21} + T_{23} \vec{e}_{23} + T_{24} \vec{e}_{24} + F \vec{i} + R_2 \vec{j} = \vec{0}$$

$$T_{13} \vec{e}_{31} + T_{23} \vec{e}_{32} + T_{34} \vec{e}_{34} + \vec{R}_3 = \vec{0}$$

$$T_{14} \vec{e}_{41} + T_{24} \vec{e}_{42} + T_{34} \vec{e}_{43} + T_{45} \vec{e}_{45} - \sqrt{3}F \vec{j} = \vec{0}$$

Dans un premier temps, on ne cherche à calculer que les tensions qui règnent dans les barres. Pour cela, on projette les équations vectorielles ci-dessus uniquement dans la direction de mobilité des noeuds, il vient alors :

$$\left| \begin{array}{l} T_{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} T_{13} + \frac{1}{2} T_{14} = 2F \\ T_{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} T_{23} + \frac{1}{2} T_{24} = F \\ \frac{1}{2} T_{14} - \frac{1}{2} T_{24} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} T_{14} + T_{34} + \frac{\sqrt{3}}{2} T_{24} = -\sqrt{3}F \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} T_{14} = T_{24} \\ T_{34} = -\sqrt{3}F - \sqrt{3}T_{24} \\ T_{23} = \frac{2\sqrt{3}}{3}F - \frac{2\sqrt{3}}{3}T_{12} - \frac{\sqrt{3}}{3}T_{24} \\ T_{13} = \frac{4\sqrt{3}}{3}F - \frac{2\sqrt{3}}{3}T_{12} - \frac{\sqrt{3}}{3}T_{24} \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système, il faut maintenant tenir compte des conditions de compatibilité :

$$(i) \quad T_{13} + T_{23} = 2\sqrt{3}T_{12} \Rightarrow 3F - 2T_{12} - T_{24} = 3T_{12} \Rightarrow T_{24} = 3F - 5T_{12}$$

Dans ces conditions on a :

$$T_{14} = 3F - 5T_{12} \quad \text{et} \quad \sqrt{3}T_{34} = -12F + 15T_{12}$$

En exploitant (ii), la seconde condition de compatibilité, on obtient :

$$2T_{12} - 12F + 15T_{12} = 6F - 10T_{12} \Rightarrow 27T_{12} = 18F \Rightarrow T_{12} = \frac{2}{3}F$$

Par suite, on déduit :

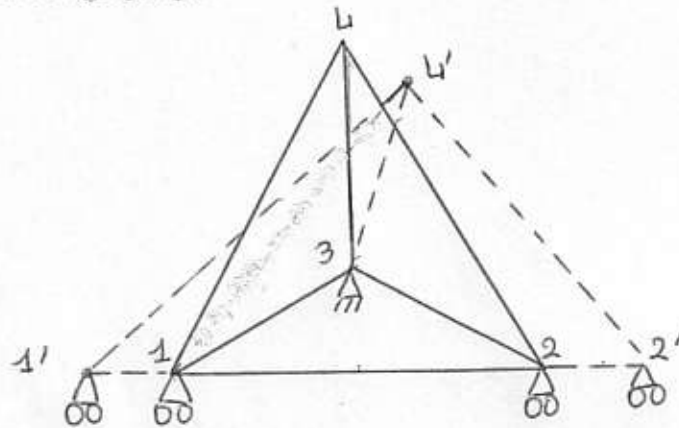
$$\left| \begin{array}{ll} T_{12} = \frac{2}{3}F & \text{traction} \\ T_{13} = \sqrt{3}F & \text{traction} \\ T_{14} = -\frac{F}{3} & \text{compression} \\ T_{23} = \frac{\sqrt{3}}{3}F & \text{traction} \\ T_{24} = -\frac{F}{3} & \text{compression} \\ T_{34} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}F & \text{compression} \end{array} \right.$$

5. Déplacements

Pour exprimer les déplacements en fonction des efforts exercés sur les barres, on utilise à nouveau la loi de comportement en élasticité linéaire : $T_{ij} = E_{ij} S \varepsilon_{ij}$. On obtient :

$$\vec{u}_1 = \frac{2F\ell}{ES} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \frac{2F\ell}{ES} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_4 = \frac{2F\ell}{ES} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

6. Représentation graphique



— Treillis initial
 --- Treillis déformé

Treillis 2

Dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère le treillis élastique plan schématisé ci-dessous.

Le noeud A_3 est fixe, les noeuds A_1 et A_2 sont en appui mobile dans la direction \vec{i} , et les noeuds A_4 et A_5 sont libres.

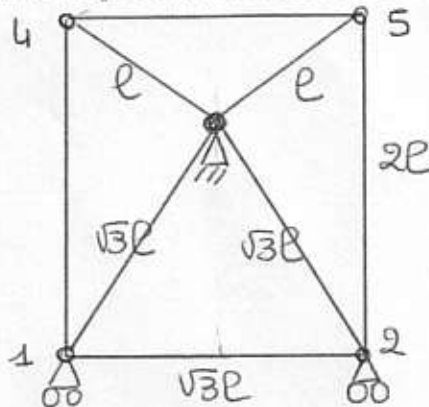
Les barres $[A_3A_4]$ et $[A_3A_5]$ sont de longueur ℓ , les barres $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$, $[A_2A_3]$ et $[A_4A_5]$ de longueur $\sqrt{3}\ell$ et les barres $[A_1A_4]$ et $[A_2A_5]$ sont de longueur 2ℓ .

Toutes les barres ont la même section S . On note $\frac{3\sqrt{3}}{4}E$ le module d'Young de la barre $[A_4A_5]$, toutes les autres sont de module d'Young E .

On exerce :

- une charge $F\vec{i}$ au noeud A_1 ,
- une charge $-\frac{1}{2}F\vec{i}$ au noeud A_2 ,
- une charge $F\vec{j}$ au noeud A_4 ,
- une charge $-\sqrt{3}F\vec{i}$ au noeud A_5 ,

On note \vec{e}_{ij} le vecteur unitaire qui va du noeud A_i au noeud A_j . T_{ij} désigne la tension qui règne dans la barre A_iA_j . Dans cet exercice on ne cherchera pas à calculer les réactions aux appuis.



1. Donner le degré de staticité du treillis.
 2. Expliciter tous les vecteurs \vec{e}_{ij}
 3. Ecrire les équations du système cinématique et exprimer les déplacements aux noeuds en fonction des allongements relatifs des barres.
 4. Ecrire les équations du système statique. Calculer les tensions qui règnent dans les barres. Préciser pour chacune d'entre elles si elles sont en traction ou en compression.
 5. Exprimer alors les déplacements des noeuds en fonction de F , ℓ , E et S
 6. Représenter sur un même graphique le treillis initial et son déformé.
1. Ce treillis est constitué de 5 noeuds, soit 10 équations statiques. Quant aux inconnues : Il y a 8 barres (soit 8 tensions) 1 appui fixe (2 inconnues) et 2 appuis mobiles (2×1 inconnue). Le système statique est alors un système de 10 équations à 12 inconnues. Ce treillis est donc hyperstatique de degré 2.

2. Vecteurs unitaires intervenants par la suite

Si on note \vec{e}_{ij} le vecteur unitaire orienté du noeud A_i vers le noeud A_j , on aura :

$$\begin{aligned}\vec{e}_{12} = \vec{e}_{45} = \vec{i} \quad \vec{e}_{13} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \quad \vec{e}_{34} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \\ \vec{e}_{14} = \vec{e}_{25} = \vec{j} \quad \vec{e}_{23} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \quad \vec{e}_{35} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\end{aligned}$$

3. Système cinématique

Pour chacune des barres du treillis on écrit la relation qui unit les déplacements des noeuds à la déformation des barres : $(\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{e}_{ij} = \ell_{ij} \varepsilon_{ij}$

$$\text{Barre [1, 2]} \implies (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{i} = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{12} \implies x_2 - x_1 = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{12}$$

$$\text{Barre [1, 3]} \implies -\frac{1}{2}\vec{u}_1 \cdot (\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}) = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{13} \implies x_1 = -2\sqrt{3} \ell \varepsilon_{13}$$

$$\text{Barre [1, 4]} \implies (\vec{u}_4 - \vec{u}_1) \cdot \vec{j} = 2 \ell \varepsilon_{14} \implies y_4 = 2 \ell \varepsilon_{14}$$

$$\text{Barre [2, 3]} \implies -\frac{1}{2}\vec{u}_2 \cdot (-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}) = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{23} \implies x_2 = 2\sqrt{3} \ell \varepsilon_{23}$$

$$\text{Barre [2, 5]} \implies (\vec{u}_5 - \vec{u}_2) \cdot \vec{j} = 2 \ell \varepsilon_{25} \implies y_5 = 2 \ell \varepsilon_{25}$$

$$\text{Barre [3, 4]} \implies \frac{1}{2}\vec{u}_4 \cdot (-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}) = \ell \varepsilon_{34} \implies -\sqrt{3}x_4 + y_4 = 2 \ell \varepsilon_{34}$$

$$\text{Barre [3, 5]} \implies \frac{1}{2}\vec{u}_5 \cdot (\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}) = \ell \varepsilon_{35} \implies \sqrt{3}x_5 + y_5 = 2 \ell \varepsilon_{35}$$

$$\text{Barre [4, 5]} \implies (\vec{u}_5 - \vec{u}_4) \cdot \vec{i} = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{45} \implies x_5 - x_4 = \sqrt{3} \ell \varepsilon_{45}$$

On déduit de ce système que :

$$x_1 = -2\sqrt{3} \ell \varepsilon_{13} \quad x_2 = 2\sqrt{3} \ell \varepsilon_{23}$$

$$x_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ell (\varepsilon_{14} - \varepsilon_{34}) \quad y_4 = 2 \ell \varepsilon_{14}$$

$$x_5 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ell (\varepsilon_{35} - \varepsilon_{25}) \quad y_5 = 2 \ell \varepsilon_{25}$$

avec les conditions de compatibilité :

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{35} + \varepsilon_{34} - \varepsilon_{25} - \varepsilon_{14} = \frac{3}{2} \varepsilon_{45} \end{cases}$$

Ces conditions peuvent aisément s'exprimer en termes de contraintes. Pour cela, il suffit d'utiliser la loi de comportement en élasticité linéaire qui dit que $T_{ij} = E_{ij} S_{ij} \varepsilon_{ij}$. Dans

notre cas $E_{45} = \frac{3\sqrt{3}}{4} E$ et $E_{ij} = E$ dans les autres cas, on aura ainsi, en multipliant chacune des équations par ES :

$$\begin{cases} ES(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}) = \frac{1}{2} ES \varepsilon_{12} \\ ES(\varepsilon_{35} + \varepsilon_{34} - \varepsilon_{25} - \varepsilon_{14}) = \frac{3}{2} ES \varepsilon_{45} \end{cases} \implies \begin{cases} T_{13} + T_{23} = \frac{1}{2} T_{12} \\ T_{35} + T_{34} - T_{25} - T_{14} = \frac{3}{2} ES \varepsilon_{45} = \frac{2\sqrt{3}}{3} T_{45} \end{cases}$$

4. Système statique

Le système statique est obtenu en écrivant les équations d'équilibre de chacun des noeuds du treillis :

$$\begin{aligned}
 T_{12} \vec{e}_{12} + T_{13} \vec{e}_{13} + T_{14} \vec{e}_{14} + F \vec{i} &= \vec{0} \\
 T_{12} \vec{e}_{21} + T_{23} \vec{e}_{23} + T_{25} \vec{e}_{25} - \frac{1}{2} F \vec{i} &= \vec{0} \\
 T_{13} \vec{e}_{31} + T_{23} \vec{e}_{32} + T_{34} \vec{e}_{34} + T_{35} \vec{e}_{35} &= \vec{0} \\
 T_{14} \vec{e}_{41} + T_{34} \vec{e}_{43} + T_{45} \vec{e}_{45} + F \vec{j} &= \vec{0} \\
 T_{25} \vec{e}_{52} + T_{35} \vec{e}_{53} + T_{45} \vec{e}_{54} - \sqrt{3} F \vec{i} &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on ne cherche à calculer que les tensions qui règnent dans les barres. Pour cela, on projette les équations vectorielles ci-dessus uniquement dans la direction de mobilité des noeuds, il vient alors :

$$\left\{ \begin{aligned}
 T_{12} + \frac{1}{2} T_{13} + F &= 0 \\
 -T_{12} - \frac{1}{2} T_{23} - \frac{1}{2} F &= 0 \\
 \frac{\sqrt{3}}{2} T_{34} + T_{45} &= 0 \\
 -T_{14} - \frac{1}{2} T_{34} + F &= 0 \\
 -T_{45} - \frac{\sqrt{3}}{2} T_{35} - \sqrt{3} F &= 0 \\
 -T_{25} - \frac{1}{2} T_{35} &= 0
 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 T_{13} &= -2T_{12} - 2F \\
 T_{23} &= -2T_{12} - F \\
 T_{45} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} T_{34} \\
 T_{14} &= -\frac{1}{2} T_{34} + F \\
 T_{35} &= T_{34} - 2F \\
 T_{25} &= -\frac{1}{2} T_{34} + F
 \end{aligned} \right.$$

Pour résoudre ce système, il faut maintenant tenir compte des conditions de compatibilité :

$$\begin{aligned}
 (i) \quad T_{13} + T_{23} &= \frac{1}{2} T_{12} \\
 (ii) \quad T_{35} + T_{34} - T_{25} - T_{14} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} T_{45}
 \end{aligned}$$

$$\text{En exploitant (i), on obtient : } -(2T_{12} + 2F) - (2T_{12} + F) = \frac{1}{2} T_{12} \Rightarrow T_{12} = -\frac{2}{3} F$$

$$\text{Quant à l'équation (ii), on aura : } T_{34} - 2F + T_{34} + \frac{1}{2} T_{34} - F + \frac{1}{2} T_{34} - F = -T_{34}$$

$$\text{Soit } T_{34} = F$$

Par suite, on déduit :

$$T_{12} = T_{23} = -\frac{2}{3}F \quad \text{compression}$$

$$T_{13} = -\frac{1}{3}F \quad \text{compression}$$

$$T_{14} = T_{25} = \frac{1}{2}F \quad \text{traction}$$

$$T_{34} = F \quad \text{traction}$$

$$T_{35} = -F \quad \text{compression}$$

$$T_{45} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F \quad \text{compression}$$

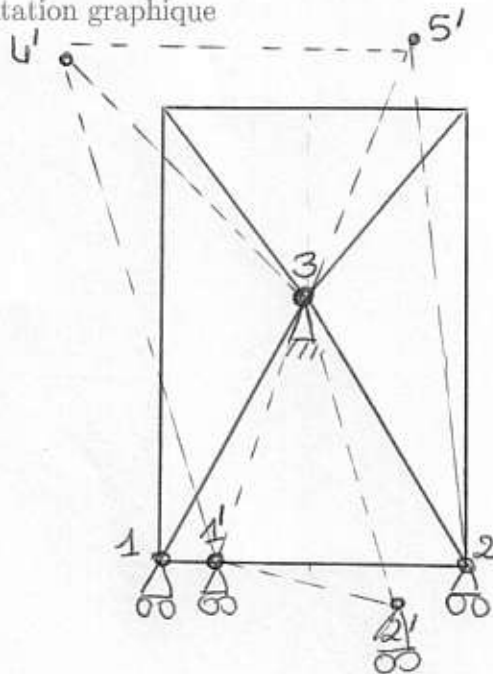
5. Déplacements

Pour exprimer les déplacements en fonction des efforts exercés sur les barres, on utilise à nouveau la loi de comportement en élasticité linéaire : $T_{ij} = E_{ij} S \varepsilon_{ij}$. On obtient :

$$\vec{u}_1 = \frac{2\sqrt{3}F\ell}{3ES} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = -\frac{4\sqrt{3}F\ell}{3ES} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

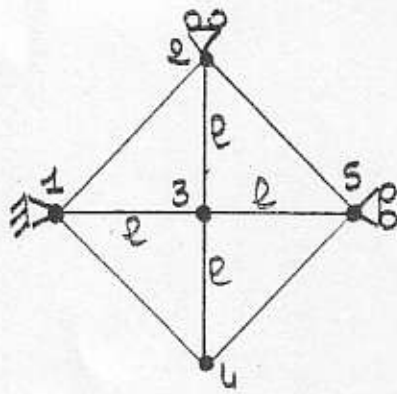
$$\vec{u}_4 = \frac{F\ell}{3ES} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_5 = \frac{F\ell}{ES} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Représentation graphique



- Treillis initial
- Treillis déformé

II. Etude d'un treillis



$$\vec{e}_2 = \vec{e}_{15} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{e}_{14} = \vec{e}_{25} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} - \vec{j})$$

1. Bilan des inconnues

. Inconnues statiques

$$\left. \begin{array}{l} T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{23}, T_{25}, T_{34}, T_{35}, T_{45} \\ \vec{R}_1, R_2 \vec{j}, R_5 \vec{i} \end{array} \right\} 12 \text{ inconnues}$$

Il y a 5 nœuds soit 10 équations statiques, ce treillis est donc hyperstatique de degré 2

. Inconnues cinématiques

$$u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad u_4 \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

Il y a 8 barres (8 équations) et 6 inconnues cinématiques
On retrouve le fait que ce treillis est hyperstatique de degré 2.

2. Système cinématique

Pour chaque des barres du treillis, on écrit la relation qui lie les déplacements des nœuds à la déformation de la barre, à savoir :

$$\text{Pour la barre } [i, j] \text{ on a } (u_j - u_i) \cdot \vec{e}_{ij} = l_{ij} \epsilon_{ij}$$

où l_{ij} désigne la longueur de la barre $[i, j]$

$$[1, 2] \Rightarrow \vec{u}_2 \cdot \vec{e}_2 = \sqrt{2} l \epsilon_{12} \Rightarrow x_2 = 2 l \epsilon_{12} \quad (1)$$

$$[1, 3] \Rightarrow \vec{u}_3 \cdot \vec{i} = l \epsilon_{13} \Rightarrow x_3 = l \epsilon_{13} \quad (2)$$

$$[1,4] \Rightarrow u_4 \cdot e_{14} = \sqrt{2} l E_{14} \Rightarrow x_4 - y_4 = 2 l E_{14} \quad (3)$$

$$[2,3] \Rightarrow (u_3 - u_2) \cdot (-j) = l E_{23} \Rightarrow y_3 = -l E_{23} \quad (4)$$

$$[2,5] \Rightarrow (u_5 - u_2) \cdot \vec{e}_{25} = \sqrt{2} l E_{25} \Rightarrow -x_2 - y_5 = 2 l E_{25} \quad (5)$$

$$[3,4] \Rightarrow (u_4 - u_3) \cdot (-j) = l E_{34} \Rightarrow y_3 - y_4 = l E_{34} \quad (6)$$

$$[3,5] \Rightarrow (u_5 - u_3) \cdot \vec{i} = l E_{35} \Rightarrow x_3 = -l E_{35} \quad (7)$$

$$[4,5] \Rightarrow (u_5 - u_4) \cdot \vec{e}_{45} = \sqrt{2} l E_{45} \Rightarrow -x_4 + y_5 - y_4 = 2 l E_{45} \quad (8)$$

$$(1) \Rightarrow x_2 = 2 l E_{12}$$

$$(2) \Rightarrow x_3 = l E_{13}$$

$$(3) \Rightarrow x_4 = l (2 E_{14} - E_{23} - E_{34})$$

$$(4) \Rightarrow y_3 = -l E_{23}$$

$$(6) \Rightarrow y_4 = -l (E_{23} + E_{34})$$

$$(5) \Rightarrow y_5 = -2 l (E_{12} + E_{25})$$

Il reste 2 équations qui n'ont pas été utilisées, ce qui était prévisible car le treillis est hyperstatique de degré 2. Ces 2 équations sont importantes car elles assurent la compatibilité du système

$$(7) \Rightarrow E_{35} = -E_{13}$$

$$(8) \Rightarrow -2 E_{14} + E_{23} + E_{34} - 2 E_{12} - 2 E_{25} + E_{23} + E_{34} = 2 E_{45}$$

$$\text{soit } E_{23} + E_{34} = E_{12} + E_{14} + E_{25} + E_{45}$$

En élasticité linéaire, la déformation dépend linéairement de la contrainte. Toutes les barres ont le même module d'Young et la même section, on a alors $T_{ij} = ES E_{ij}$ (loi de comportement) ou a pu la valeur obtenu

$$u_2 = \frac{l}{ES} \begin{pmatrix} 2 T_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \frac{l}{ES} \begin{pmatrix} T_{13} \\ -T_{23} \end{pmatrix} \quad u_4 = \frac{l}{ES} \begin{pmatrix} 2 T_{14} - T_{23} - T_{34} \\ -T_{23} - T_{34} \end{pmatrix} \quad u_5 = \frac{l}{ES} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 T_{12} - 2 T_{25} \end{pmatrix}$$

avec les conditions de compatibilité

$$T_{35} = -T_{13} \quad \text{et} \quad T_{23} + T_{34} = T_{12} + T_{14} + T_{25} + T_{45}$$

3. système statique

On écrit les équations d'équilibre de chaque nœud

$$n^{\circ}1 \Rightarrow T_{12} \vec{e}_2 + T_{13} \vec{e}_3 + T_{14} \vec{e}_4 + \vec{R}_1 = 0$$

$$n^{\circ}2 \Rightarrow T_{12} \vec{e}_1 + T_{23} \vec{e}_3 + T_{25} \vec{e}_5 + F \vec{i} + R_2 \vec{j} = 0$$

$$n^{\circ}3 \Rightarrow T_{13} \vec{e}_3 + T_{23} \vec{e}_3 + T_{34} \vec{e}_4 + T_{35} \vec{e}_5 + F \vec{i} + 2F \vec{j} = 0$$

$$n^{\circ}4 \Rightarrow T_{14} \vec{e}_4 + T_{34} \vec{e}_4 + T_{45} \vec{e}_5 - F \vec{i} - F \vec{j} = 0$$

$$n^{\circ}5 \Rightarrow T_{25} \vec{e}_5 + T_{45} \vec{e}_5 - \frac{\sqrt{2}}{2} F \vec{j} + R_5 \vec{i} = 0$$

• Tensions dans chaque barre

Pour calculer les tensions dans les barres on ne s'intéresse dans un premier temps qu'aux nœuds mobiles

$$\begin{array}{l} n^{\circ}2 \text{ sur } \vec{i} \\ n^{\circ}3 \text{ sur } \vec{i} \\ n^{\circ}3 \text{ sur } \vec{j} \\ n^{\circ}4 \text{ sur } \vec{i} \\ n^{\circ}4 \text{ sur } \vec{j} \\ n^{\circ}5 \text{ sur } \vec{j} \end{array} \left\| \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{2}}{2} T_{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{25} + F = 0 \\ -T_{13} + T_{35} + F = 0 \\ T_{23} - T_{34} + 2F = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} T_{14} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{45} - F = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} T_{14} + T_{34} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{45} - F = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} T_{25} - \frac{\sqrt{2}}{2} T_{45} - \frac{\sqrt{2}}{2} F = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} T_{12} - T_{25} = \sqrt{2} F \\ T_{13} - T_{35} = F \\ T_{23} - T_{34} = -2F \\ -T_{14} + T_{45} = \sqrt{2} F \\ T_{14} + \sqrt{2} T_{34} + T_{45} = \sqrt{2} F \\ T_{25} - T_{45} = F \end{array} \right.$$

alors

$$\begin{aligned} T_{12} &= T_{25} + \sqrt{2} F & T_{13} - T_{35} &= F \\ T_{45} &= T_{25} - F \\ T_{14} &= T_{25} - (\sqrt{2} + 1) F \\ T_{34} &= -\sqrt{2} T_{25} + (2 + \sqrt{2}) F \\ T_{23} &= -\sqrt{2} T_{25} + \sqrt{2} F \end{aligned}$$

A ces équations, on ajoute les conditions de compatibilité

$$T_{35} = -T_{13} \quad \text{et} \quad T_{23} + T_{34} = T_{12} + T_{14} + T_{25} + T_{45}$$

la première condition permet d'établir que

$$T_{13} = \frac{F}{2} \quad \text{et} \quad T_{35} = -\frac{F}{2}$$

Quand à la seconde, on aura eu remplacé par les relations précédentes

$$-\sqrt{2} T_{25} + \sqrt{2} F - \sqrt{2} T_{25} + (2 + \sqrt{2}) F = T_{25} + \sqrt{2} F + T_{25} - (\sqrt{2} + 1) F + T_{25} + T_{25} - F$$

$$(4 + 2\sqrt{2}) F = (2\sqrt{2} + 4) T_{25} \Rightarrow \text{on déduit } T_{25} = F$$

On a finalement pour les tensions

$$T_{12} = (\sqrt{2} + 1) F : \text{traction}$$

$$T_{13} = \frac{F}{2} : \text{traction}$$

$$T_{14} = -\sqrt{2} F : \text{compression}$$

$$T_{23} = 0 : \text{barre pas chargée}$$

$$T_{25} = F : \text{traction}$$

$$T_{34} = 2F : \text{traction}$$

$$T_{35} = -\frac{F}{2} : \text{compression}$$

$$T_{45} = 0 : \text{barre pas chargée}$$

• Réactions aux appuis

On traite maintenant les équilibres des nœuds en appui

$$n^{\circ} 1 \Rightarrow R_1 = -T_{12} \vec{e}_2 - T_{13} \vec{e}_3 - T_{14} \vec{e}_4 \Rightarrow \vec{R}_1 = -F \left[\frac{(\sqrt{2}+1)}{2} \vec{e}_1 + (2 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \vec{e}_2 \right]$$

$$n^{\circ} 2 \Rightarrow R_2 = T_{12} \vec{e}_2 + T_{23} \vec{e}_3 + T_{25} \vec{e}_5$$

$$R_2 = (\sqrt{2} + 1) F \vec{e}_2$$

$$n^{\circ} 5 \Rightarrow R_5 = +T_{25} \vec{e}_5 + T_{45} \vec{e}_4 \Rightarrow R_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} F \vec{e}_1$$

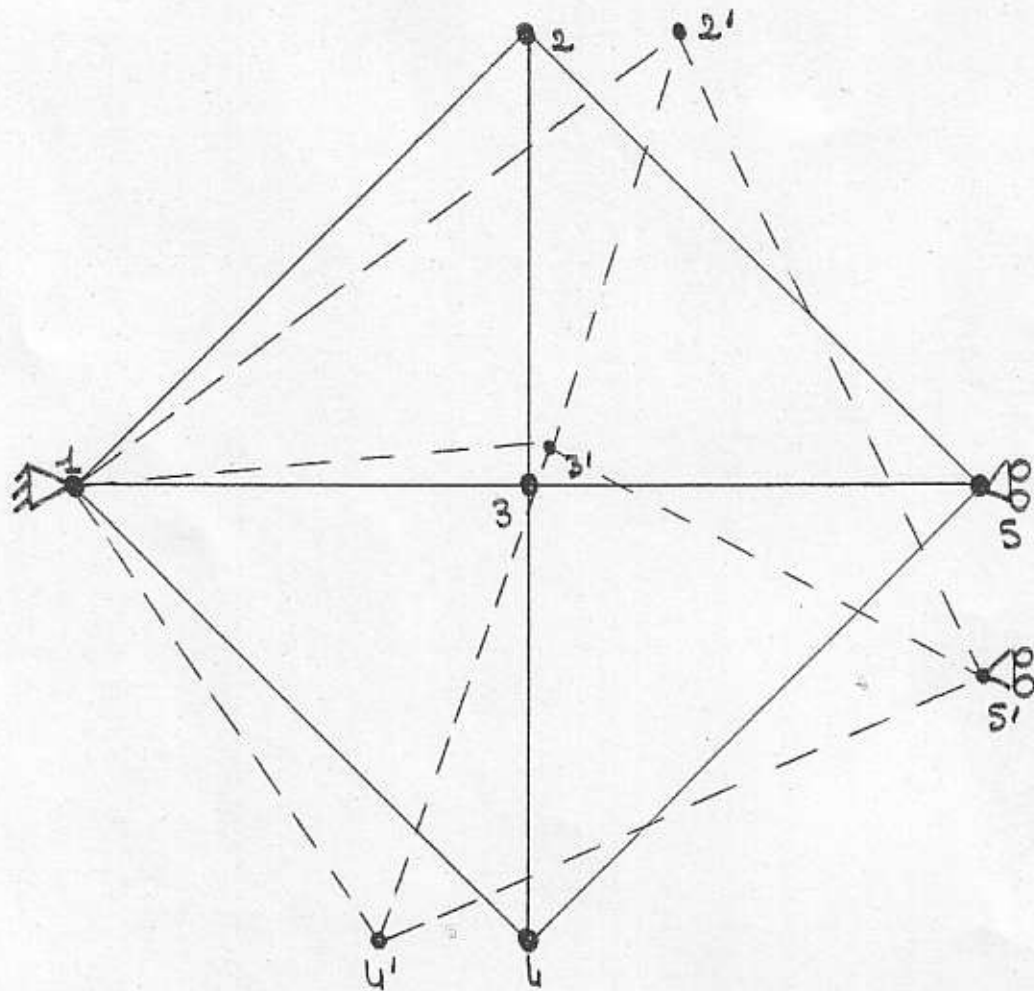
4. Loi de comportement

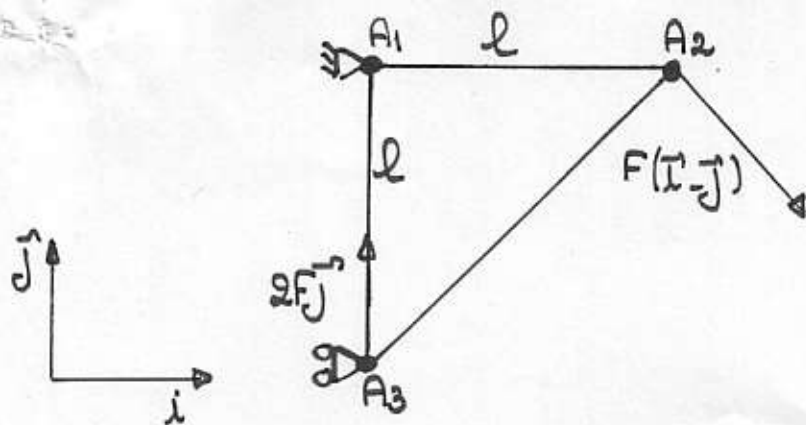
Pour pouvoir résoudre complètement le treillis, on exprime les déplacements en termes de forces. Pour cela, on utilise à nouveau la loi de comportement $T_{ij} = ES E_{ij}$ il vient

$$u_2 = \frac{FL}{ES} \begin{pmatrix} 2(\sqrt{2}+1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \frac{FL}{ES} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \frac{FL}{ES} \begin{pmatrix} -2(\sqrt{2}+1) \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$u_5 = \frac{FL}{ES} \begin{pmatrix} 0 \\ -2(\sqrt{2}+2) \end{pmatrix}$$

5. Représentation graphique





Les barres ont mêmes sections S , même module d'Young E

Bilan de statique : avant d'aller quelque part on regarde où c'est

• Inconnues statiques : T_{12}, T_{13}, T_{23} } 6 inconnues
 $R_1; R_3 I$

• 3 nœuds \Rightarrow 6 équations

Autant d'équations que d'inconnues : le treillis est isostatique

système statique

$$n^\circ A_1 \Rightarrow T_{12} \vec{e}_{12} + T_{13} \vec{e}_{13} + \vec{R}_1 = 0$$

$$n^\circ A_2 \Rightarrow T_{12} \vec{e}_{21} + T_{23} \vec{e}_{23} + F(\vec{I} - \vec{J}) = 0$$

$$n^\circ A_3 \Rightarrow T_{13} \vec{e}_{31} + T_{23} \vec{e}_{32} + 2F\vec{J} + R_3 \vec{I} = 0$$

Dans un premier temps, on ne se préoccupe pas des réactions aux appuis. On va donc projeter les équations d'équilibre des nœuds uniquement suivant la direction de leur mobilité. Il vient

$$\text{nœud } A_2 \left\{ \begin{array}{l} -T_{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} T_{23} + F = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} T_{23} - F = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_{23} = -\sqrt{2} F \text{ compression} \\ T_{12} = 2F \text{ traction} \\ T_{13} = -F \text{ compression} \end{array} \right.$$

$$\text{nœud } A_3 \quad T_{13} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{23} + 2F = 0$$

On calcule ensuite les réactions

$$\bullet n^\circ A_1 \Rightarrow \vec{R}_1 = -T_{12} \vec{I} + T_{13} \vec{J} \Rightarrow \vec{R}_1 = -F(\sqrt{2} \vec{I} + \vec{J})$$

$$\bullet n^\circ A_3 \text{ sur } \vec{I} \quad R_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} T_{23} \Rightarrow \vec{R}_3 = F \vec{I}$$

Système cinématique: $(\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{e}_{ij} = l_{ij} \varepsilon_{ij}$

$$u_1 = 0 \quad u_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

barre (1,2) $\Rightarrow (u_2 - u_1) \cdot \vec{i} = l \varepsilon_{12} \Rightarrow x_2 = l \varepsilon_{12}$

barre (1,3) $\Rightarrow -u_3 \cdot \vec{j} = l \varepsilon_{13} \Rightarrow y_3 = -l \varepsilon_{13}$

barre (2,3) $\Rightarrow (u_3 - u_2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) = -\sqrt{2} l \varepsilon_{23} \Rightarrow y_3 - x_2 - y_2 = -2l \varepsilon_{23}$

$$y_2 = y_3 - x_2 + 2l \varepsilon_{23} = -l \varepsilon_{13} - l \varepsilon_{12} + 2l \varepsilon_{23}$$

Loi de comportement
 En élasticité linéaire la déformation dépend linéairement de la contrainte

$$\text{alors } \varepsilon_{12} = \frac{T_{12}}{ES} = \frac{2F}{ES} \quad \varepsilon_{13} = -\frac{F}{ES} \quad \varepsilon_{23} = -\frac{\sqrt{2}F}{ES}$$

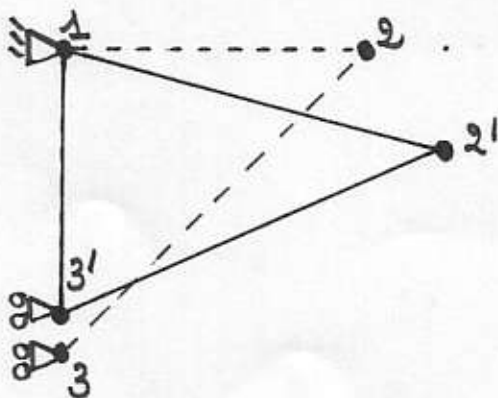
Le treillis est désormais entièrement résolu car

$$T_{12} = 2F \quad T_{13} = -F \quad T_{23} = -\sqrt{2}F$$

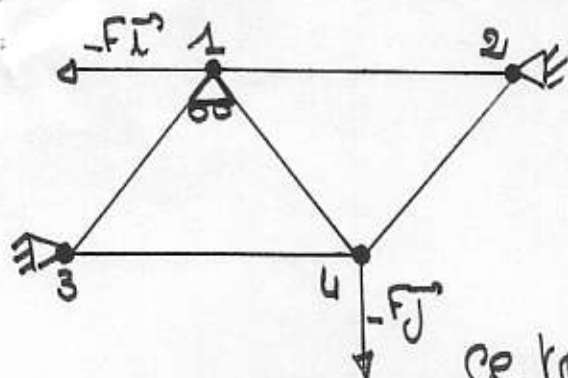
$$\vec{u}_1 = 0 \quad u_2 = \frac{Fl}{ES} (2\vec{i} - (1+\sqrt{2})\vec{j}) \quad u_3 = + \frac{Fl}{ES} \vec{j}$$

Accessoirement $\vec{R}_1 = -F(2\vec{i} + \vec{j}) \quad \vec{R}_3 = F\vec{i}$

La prise sur le gâteau: Représentation graphique



$$1 + 2\sqrt{2} \approx 3,8$$



- 4 nœuds : 8 éq^{ons} statiques
- 5 barres
- 2 appuis fixes } 10 inconnues
- 1 appui mobile } statiques

ce treillis est hyperstatique de degré 2

$$\vec{e}_{31} = \vec{e}_{42} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{e}_{14} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

Système cinématique

$$u_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = u_3 = 0$$

$$u_4 \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{barre } [1,2] \Rightarrow (u_2 - u_1) \cdot \vec{i} = l \epsilon_{12} \Rightarrow x_1 = -l \epsilon_{12}$$

$$\text{barre } [1,3] \Rightarrow (u_3 - u_1) \cdot \vec{e}_{31} = l \epsilon_{13} \Rightarrow x_1 = -2l \epsilon_{13}$$

$$\text{barre } [1,4] \Rightarrow (u_4 - u_1) \cdot \vec{e}_{14} = l \epsilon_{14} \Rightarrow x_4 - x_1 - \sqrt{3} y_4 = 2l \epsilon_{14}$$

$$\text{barre } [2,4] \Rightarrow u_4 \cdot \vec{e}_{42} = l \epsilon_{24} \Rightarrow x_4 + \sqrt{3} y_4 = -2l \epsilon_{24}$$

$$\text{barre } [3,4] \Rightarrow u_4 \cdot \vec{i} = l \epsilon_{34} \Rightarrow x_4 = l \epsilon_{34}$$

Il vient avec les conditions:

$$x_1 = -l \epsilon_{12} \quad x_4 = l \epsilon_{34} \quad y_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} l (2\epsilon_{24} + \epsilon_{34})$$

$$\epsilon_{12} = +2\epsilon_{13}$$

$$2\epsilon_{34} + \epsilon_{12} = 2\epsilon_{14} - 2\epsilon_{24}$$

ou encore

$$\epsilon_{12} = 2\epsilon_{13} \quad \text{et}$$

$$\epsilon_{34} + \epsilon_{13} = \epsilon_{14} - \epsilon_{24}$$

Ces deux conditions s'écrivent en termes de contraintes sous la forme

$$\begin{cases} T_{12} = 2T_{13} \\ T_{13} + T_{24} + T_{34} = T_{14} \end{cases}$$

$$T_{13} + T_{24} + T_{34} = T_{14}$$

Système statique: tensions dans les barres

On écrit l'équilibre des nœuds dans la direction de mobilité

$$\text{n°1 sur } \vec{i} \quad -F - \frac{1}{2}T_{13} + T_{12} + \frac{1}{2}T_{14} = 0$$

$$\text{n°4} \Rightarrow \begin{cases} -T_{34} - \frac{1}{2}T_{14} + \frac{1}{2}T_{24} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}T_{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}T_{24} - F = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer les tensions dans les barres, il faut tenir compte des conditions de compatibilité, il s'agit alors de résoudre :

$$\begin{cases} 2T_{12} - T_{13} + T_{14} = 2F \\ T_{14} - T_{24} + 2T_{34} = 0 \\ T_{14} + T_{24} = \frac{2\sqrt{3}}{3}F \\ T_{12} = 2T_{13} \\ T_{13} + T_{24} + T_{34} = T_{14} \end{cases}$$

$$T_{12} = 2T_{13}$$

$$(1) \Rightarrow 3T_{13} + T_{14} = 2F \Rightarrow T_{14} = 2F - 3T_{13}$$

$$(3) \Rightarrow T_{24} = -T_{14} + \frac{2\sqrt{3}}{3}F = -2F + 3T_{13} + \frac{2\sqrt{3}}{3}F \Rightarrow T_{24} = \frac{2}{3}(-3 + \sqrt{3})F + 3T_{13}$$

$$(2) \Rightarrow 2T_{34} = -T_{14} + T_{24} = -2F + 3T_{13} - 2F + 3T_{13} + \frac{2\sqrt{3}}{3}F$$

$$2T_{34} = -4F + \frac{2\sqrt{3}}{3}F + 6T_{13} \Rightarrow T_{34} = \left(-2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)F + 3T_{13}$$

$$(5) \Rightarrow T_{13} - 2F + 3T_{13} + \frac{2\sqrt{3}}{3}F - 2F + \frac{\sqrt{3}}{3}F + 3T_{13} = 2F - 3T_{13}$$

$$\text{soit } (1+3+3+3)T_{13} = (2+2+2-\sqrt{3})F \Rightarrow T_{13} = \frac{6-\sqrt{3}}{10}F$$

$$T_{13} = \frac{6-\sqrt{3}}{10}F : \text{traction}$$

$$T_{12} = \frac{6-\sqrt{3}}{5}F : \text{traction}$$

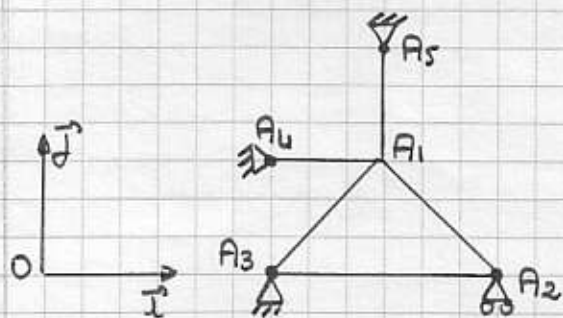
$$T_{14} = \frac{2+3\sqrt{3}}{10}F : \text{traction}$$

$$T_{24} = \frac{11\sqrt{3}-6}{20}F : \text{traction}$$

$$T_{34} = -\frac{6+\sqrt{3}}{20}F : \text{compression}$$

féca 2. Septembre 95

I. Etude d'un treillis



Module d'Young E , section S

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 A_3} = \sqrt{2}L \quad \overline{A_1 A_4} = \overline{A_1 A_5} = L$$

$$\overline{A_2 A_3} = 2L$$

charge $\vec{P} = F\vec{I}$ ($F > 0$) au nœud A_1

1. Système cinématique

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \vec{u}_4 = \vec{u}_5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 \text{ inconnues cinémat.} \\ 5 \text{ équations} \end{cases}$$

équation cinématique : $(\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{e}_{ij} = \epsilon_{ij} \epsilon_j$ (1 par barre)

$$\text{barre } [A_1 A_2] \Rightarrow (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = 2L\epsilon_2 \Rightarrow x_2 - x_1 + y_1 = 2L\epsilon_2$$

$$\text{barre } [A_1 A_3] \Rightarrow (\vec{u}_3 - \vec{u}_1) \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = -2L\epsilon_3 \Rightarrow x_1 + y_1 = 2L\epsilon_3$$

$$\text{barre } [A_1 A_4] \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{i} = L\epsilon_4 \Rightarrow x_1 = L\epsilon_4$$

$$\text{barre } [A_1 A_5] \Rightarrow -\vec{u}_1 \cdot \vec{j} = L\epsilon_5 \Rightarrow y_1 = -L\epsilon_5$$

$$\text{barre } [A_2 A_3] \Rightarrow \vec{u}_2 \cdot \vec{i} = 2L\epsilon_3 \Rightarrow x_2 = 2L\epsilon_3$$

$$\text{On en déduit } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} L\epsilon_4 \\ -L\epsilon_5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2L\epsilon_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \boxed{\epsilon_4 - \epsilon_5 = 2\epsilon_3} \text{ et } \boxed{2\epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 = 2\epsilon_2}$$

Il y a deux équations de compatibilité \Rightarrow ce treillis est hyperstatique de degré 2

2. Tension dans les barres

Pour calculer les tensions des barres on écrit l'équilibre des nœuds qui ne sont pas des appuis

$$n^{\circ} A_1 \Rightarrow T_{12} \vec{e}_2 + T_{13} \vec{e}_3 + T_{14} \vec{e}_4 + T_{15} \vec{e}_5 + \vec{P} = 0$$

On projette cette équation sur les axes \vec{i} et \vec{j}

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} T_{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} T_{13} - T_{14} + F = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} T_{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} T_{13} + T_{15} = 0 \end{cases}$$

$$n^{\circ} A_2 \text{ suivant } \vec{i} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} T_{12} - T_{23} = 0$$

On a ainsi écrit un système de 3 équations à 5 inconnues. Pour résoudre ce système il convient d'ajouter les conditions de compatibilité, pour cela on utilise la loi de comportement élastique à savoir $T_{ij} = E S \epsilon_{ij}$, on obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} T_{12} - T_{13} - \sqrt{2} T_{14} = -F \\ T_{12} + T_{13} - \sqrt{2} T_{15} = 0 \\ T_{12} + \sqrt{2} T_{23} = 0 \\ T_{14} - T_{15} - 2 T_{13} = 0 \\ 2 T_{12} + T_{14} + T_{15} - 2 T_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{23} = \frac{\sqrt{2}-1}{4} F > 0 \Rightarrow \text{traction} \\ T_{12} = -\frac{2-\sqrt{2}}{4} F \text{ compression} \\ T_{13} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} F \text{ traction} \\ T_{14} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} F \text{ traction} \\ T_{15} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} F \text{ traction} \end{cases}$$

3. Déplacements aux nœuds

La loi de comportement élastique permet d'écrire $\epsilon_{ij} = \frac{T_{ij}}{ES}$

$$\text{alors } \epsilon_{14} = \frac{F}{4ES} (2\sqrt{2}-1) \quad \epsilon_{15} = \frac{F}{4ES} (3-2\sqrt{2}) \quad \epsilon_{23} = \frac{F}{4ES} (\sqrt{2}-1)$$

on en déduit

$$\boxed{\vec{u}_1 = \frac{F \ell}{4ES} \left((2\sqrt{2}-1) \vec{i} - (3-2\sqrt{2}) \vec{j} \right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{u}_2 = \frac{F \ell}{2ES} (\sqrt{2}-1) \vec{i}}$$

4. Réactions aux appuis

Pour déterminer les réactions, il suffit d'écrire l'équilibre des noeuds qui sont des appuis

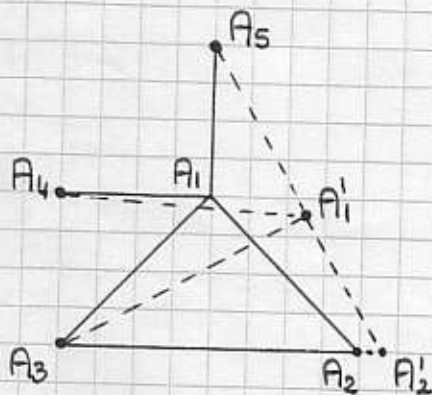
$$\text{n}^\circ A_2 \text{ suivant } \vec{j} : \vec{R}_2 \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{12} = 0 \Rightarrow \vec{R}_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{L} \vec{j}$$

$$\text{n}^\circ A_3 : \vec{R}_3 + T_{23} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{13} (\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow \vec{R}_3 = -\frac{F}{L} (\vec{i} + (2-\sqrt{2})\vec{j})$$

$$\text{n}^\circ A_4 : \vec{R}_4 + T_{14} \vec{i} = 0 \Rightarrow \vec{R}_4 = -\frac{2\sqrt{2}-1}{L} F \vec{i}$$

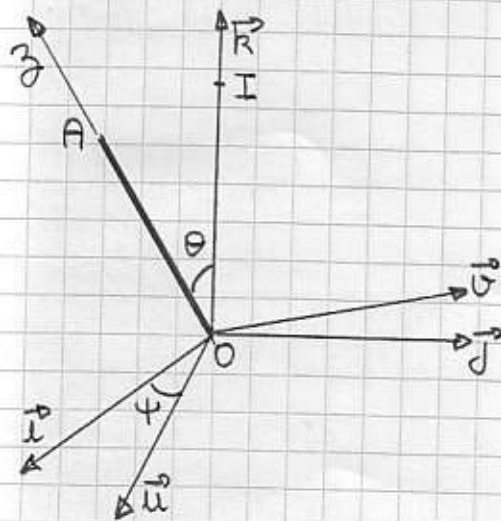
$$\text{n}^\circ A_5 : \vec{R}_5 - T_{15} \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{R}_5 = \frac{3-2\sqrt{2}}{L} F \vec{j}$$

On peut enfin représenter sur un graphique le treillis et sa déformée

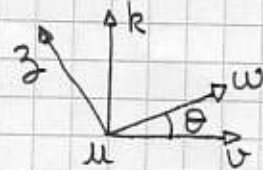
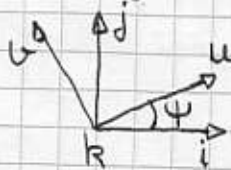


hors propos

II. Mouvement d'une barre en rotation autour d'un point fixe



S: longueur a, masse m $\vec{OA} = a\vec{k}$



Attraction : $\begin{bmatrix} -m\omega^2 \vec{OG} \\ 0 \end{bmatrix}_G$ $\vec{OI} = \frac{3}{2}a\vec{k}$

$$\omega^2 > \frac{2g}{3a}$$