II. Torseurs

Exercice 1

Relativement au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère 3 points O(0,0,0), A(2,0,1), B(1,-1,0)

On se donne un champ équiprojectif $\vec{u}$ tel que $\vec{u}(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u}(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$

1. Calculer la résultante et l'axe central de $\vec{u}$.
2. Déterminer analytiquement $\vec{u}(M)$ $\forall M(x,y,z)$

1. Résultante - Axe central

$\vec{u}$ est un champ équiprojectif $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ définit un torseur

alors $\forall P, Q \in \mathcal{E}$ $\exists! \vec{R}$; $\vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ}$

on note $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{R}$

Si la relation ci dessus est vraie $\forall P, Q \in \mathcal{E}$ elle le sera en particulier pour les points O, A et B

$\vec{u}(A) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OA}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} q = 0 \\ 2r - p = -4 \\ -2q = 0 \end{array} \right.$$

Ce système ne permet pas de déterminer parfaitement la résultante

La résultante d'un torseur est unique il serait donc tout à fait exotique et mal venu de choisir $r = 0$ et $p = 4$ ou $r = -2$ et $p = 0$ ou tout autre possibilité aléatoire

Il faut 3 points non alignés pour déterminer un torseur. On va donc exploiter le point B.

$\vec{u}(B) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OB}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} r = -2 \\ \alpha = -p - q \end{array} \right.$$

On déduit finalement $\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\alpha = 0$

axe central $\Delta = \{P \in \mathcal{E};\ \vec{R} \wedge \vec{u}(P) = 0\}$ par définition

On peut remarquer qu'ici $\vec{R} \cdot \vec{u}(O) = 0$

l'invariant scalaire est nul $\Rightarrow$ ce torseur est un glisseur

Dans le cas d'un glisseur $\Delta = \{P \in \mathcal{E};\ \vec{u}(P) = 0\}$

$$\vec{u}(P) = \vec{u}(O) + R \wedge \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}(P) = \begin{pmatrix} 1+2y \\ 2-2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}(P) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \Delta = \left\{P \in \mathcal{E};\ \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ z \end{pmatrix}\ z \in \mathbb{R}\right\}$$

__Rem__ : on retrouve bien $\Delta \mathbin{/\!/} \vec{R}$

Exercice 2

Dans le repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point $A(1,1,1)$.

On considère un torseur $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{u}(P) \end{bmatrix}_P$ qui satisfait $\vec{u}(A) = \vec{u}(O)$

1. Montrer que $\forall B$ tel que (O,A,B) soient alignés, on a $\vec{u}(B) = \vec{u}(O)$

2. On suppose que $\forall P \in (O,\vec{i},\vec{j})$ on a $\vec{u}(P).\vec{i} = \vec{u}(O).\vec{i} - \overrightarrow{OP}.\vec{j}$

Déterminer $\vec{u}$ en tout point de l'espace. Calculer la résultante et l'axe central de $\mathcal{T}$

1. si (O,A,B) sont alignés $\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$ $\quad \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}(A) = \vec{u}(O) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OA}$

si $\vec{u}(A) = \vec{u}(O) \Rightarrow \vec{R}\wedge\overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow \vec{R} // \overrightarrow{OA} \Rightarrow \vec{R} = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$

$\vec{u}(B) = \vec{u}(O) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OB} = \vec{u}(O) + \vec{R}\wedge(\lambda\overrightarrow{OA}) = \vec{u}(O) + \lambda\vec{R}\wedge\overrightarrow{OA} = \vec{u}(O)$

2. $\vec{u}(P) = \vec{u}(O) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}$

si $P \in P(O,\vec{i},\vec{j})$ alors $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP} = \alpha\begin{pmatrix}-y\\x\\y-x\end{pmatrix}$

$\vec{u}(P).\vec{i} = \vec{u}(O).\vec{i} + (\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}).\vec{i} = u(O).\vec{i} - \overrightarrow{OP}.\vec{j}$

on déduit $-\alpha y = -y \Rightarrow \alpha = 1$

ainsi $\vec{R} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ on pose $\vec{u}(O) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

alors $\forall M \in \mathcal{E}$ $\vec{u}(M) = u(O) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{u}(M) = \begin{pmatrix}\alpha+z-y\\\beta+x-z\\\gamma+y-x\end{pmatrix}$

$\Delta = \{P \in \mathcal{E} ; \vec{R}\wedge\vec{u}(P) = 0\}$

$\vec{R}\wedge\vec{u}(P) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha+z-y\\\beta+x-z\\\gamma+y-x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma-\beta-2x+y+z\\\alpha-\gamma+x-2y+z\\\beta-\alpha+x+y-2z\end{pmatrix} = 0$

Ce qui donne l'équation d'une droite qui doit être parallèle à $\vec{R}$

Exercice 3

Dans le repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le champ de vecteurs défini en tout point P de l'espace par : $\vec{u}(P) = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AP}$ où A est un point fixé de l'espace. Montrer que le champ $\vec{u}$ défini un torseur dont on déterminera la résultante et l'axe central.

Si $\vec{u}(P) = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AP}$ définit un torseur on doit pouvoir établir l'existence d'un unique vecteur $\vec{R}$,

$\forall (P, Q) \quad \vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$

$$\vec{u}(Q) = \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{AQ} = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) \wedge (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ})$$
$$= \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PQ}$$
$$= \vec{u}(P) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{AP}) \wedge \overrightarrow{PQ}$$
$$= \vec{u}(P) + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Si on pose $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$ alors $\vec{R}$ est bien déterminée de manière unique et la relation sur les torseurs est satisfaite

Remarque $\vec{u}(O) = \vec{u}(A) = 0 \Rightarrow \vec{u}$ est un glisseur

Dans ce cas $\Delta = \{P ; \vec{u}(P) = 0\}$

$$\Delta = \{P ; \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA}\}$$

Exercice 4

Dans le repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A et B tels que $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = a\vec{j}$ (a est une constante non nulle)

On considère un torseur $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{u}(P) \end{bmatrix}_{\mathcal{P}}$ qui satisfait $\vec{u}(A) = \vec{u}(B) = a(\vec{j} - \vec{k})$ et $\vec{u}(O).\vec{k} = 0$

1. Déterminer $\vec{u}(O)$
2. Calculer la résultante et l'axe central de $\mathcal{T}$

1. Si $\vec{u}$ est un champ équiprojectif (définit un torseur) alors $\forall P,Q$ $[\vec{u}(Q)-\vec{u}(P)].\overrightarrow{PQ}=0$

On aura en particulier

$$\begin{cases} [\vec{u}(B)-\vec{u}(O)].\overrightarrow{OB}=0 \\ [\vec{u}(A)-\vec{u}(O)].\overrightarrow{OA}=0 \end{cases}$$

On pose (pour le calcul) $\vec{u}(O) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ avec $\gamma=0$ car $\vec{u}(O).\vec{k}=0$

$[\vec{u}(B)-\vec{u}(O)].\overrightarrow{OB}=0 \Rightarrow a(a-\beta)=0 \Rightarrow \beta=a$

$[\vec{u}(A)-\vec{u}(O)].\overrightarrow{OB}= \Rightarrow a\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow \vec{u}(O)=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\vec{u}$ définit un torseur $\Rightarrow \exists!\, \vec{R}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\forall O,P$ $\vec{u}(P)=\vec{u}(O)+R\wedge\overrightarrow{OP}$

Cette relation sera vrai en particulier pour les points O, A et B.

$$\vec{u}(A)=\vec{u}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OA} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ r=0 \\ -q=-1 \end{cases}$$

(2) p n'a pas été déterminé ne signifie pas $p=0$

Il faut à nouveau exploité la relation sur les torseurs

$$\vec{u}(B)=\vec{u}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OB} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ 0=0 \\ ap=-a \end{cases}$$

et finalement $\vec{R}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Delta=\{P\in\mathcal{E};\ \vec{R}\wedge\vec{u}(P)=0\}$

$$\forall P\in\mathcal{E} \quad \vec{u}(P)=\vec{u}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ a+z \\ -x-y \end{pmatrix}$$

$$\vec{R}\wedge\vec{u}(P)=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} z \\ a+z \\ -x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x-y \\ x+y \\ -a-2z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=-y \\ z=-\frac{a}{2} \end{matrix}}$$

Exercice 5

Soit (O, A, B, C) les sommets d'un carré de coté a situé dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère le champ de vecteurs équiprojectif $\vec{u}$ défini par $\vec{u}(O) = \overrightarrow{AC}$, $\vec{u}(A) = \overrightarrow{BO}$ et $\vec{u}(M) = 0$ pour tous les points M situés sur l'axe $D\vec{k}$ (où D est le centre du carré)

1. Calculer la résultante et l'axe central de T
2. Calculer $\vec{u}(M)$ pour tous les points M de l'espace

1. Si $\vec{u}$ définit un torseur alors $\exists ! \vec{R}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$\forall (O,P) \in \mathcal{E}$ $\quad \vec{u}(P) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP}$

$$\vec{u}(A) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OA} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ ar = -2a \\ -aq = 0 \end{cases}$$

$r = -\cancel{1}2$ $\quad q = 0$ $\quad$ p indéterminé

$\forall M \in D\vec{k}$ $\quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}(M) = 0$

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OM} \Rightarrow 0 = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} +a = qz - \frac{ar}{2} \\ -a = \frac{a}{2}r - pz \\ 0 = ap - aq \end{cases}$$

Ce système doit être vérifié $\forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow p = 0$

et finalement $\vec{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. $\forall P \in \mathcal{E}$ $\quad \vec{u}(P) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + y \\ 2a - x \\ 0 \end{pmatrix}$

Rem $\vec{u}(O) \cdot \vec{R} = 0 \Rightarrow$ ce torseur est un glisseur

dans ce cas $\Delta = \{P ; \vec{u}(P) = 0\}$

$$\Delta = \left\{ P \in \mathcal{E} ; \vec{OP}\begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 6

On considère deux torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ définis par

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} R_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \vec{0} \end{bmatrix}_O \text{ et } \mathcal{T}_2 = \begin{bmatrix} R_2 = (0,1,0) \\ u_2(O) = (2\sin\theta, 0, 0) \end{bmatrix}_O$$

1. Vérifier que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont des glisseurs et déterminer leur support
2. Donner l'axe de $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$

1_ On voit immédiatement que T_1 est un glisseur car il existe un point (en l'occurrence O) tel que $\vec{T_1}(O) = 0$

Pour T_2, il faut calculer l'invariant scalaire
$\vec{R_2} \cdot \vec{u_2}(O) = 0 \Rightarrow T_2$ est bien un glisseur

Le support de T_1 : droite // à $\vec{R_1}$ qui passe par O
Le support de T_2 :

$$u_2(P) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin\theta + z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = 0$$

$P \in \Delta \Rightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}$: la droite // $\vec{R_2}$ qui passe par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}$

2_ T_1 et T_2 sont exprimés au même point $\Rightarrow$ les additionner ne pose pas de difficulté

$$T_1 + T_2 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1+\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(O) \end{bmatrix}_O$$

C'est ballot mais la somme de deux glisseurs n'est pas un glisseur $(\vec{R} \cdot \vec{m}(O) \neq 0)$ et pour calculer l'axe de $T_1 + T_2$ il faut faire le calcul complet

$\forall P$ ~~...~~ $\vec{m}(P) = \vec{m}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP}$

puis

$\vec{R} \wedge \vec{m}(P) = 0 \Rightarrow$ bon courage !

Feuille intercalaire N° ....