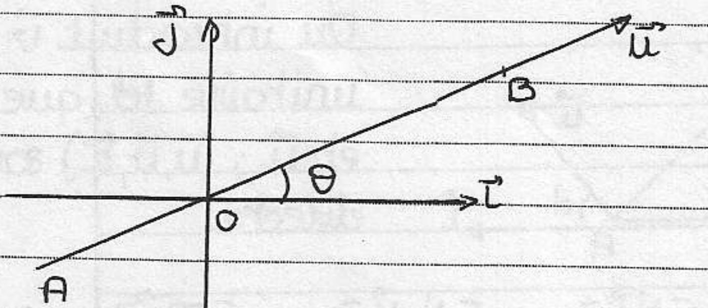
Exercice 4

Relativement au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (avec $O\vec{j}$ vertical ascendant), $\vec{g} = -g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur on considère un solide S situé dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. S est une barre homogène de masse M, d'extrémités A et B et de longueur a.
On introduit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{u}$. On pose $\overrightarrow{AO} = x\vec{u}$ et on note $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{k}$.
La liaison entre le batît fixe modélisée par $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et la barre est une liaison pivot parfaite d'axe $O\vec{k}$
On exerce sur la barre un couple $\gamma\vec{k} = \frac{mag}{4}\sin\theta\vec{k}$. Déterminer la distance x pour que $\theta = \frac{\pi}{4}$ soit une position d'équilibre



$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \underset{①}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G} + \underset{②}{\begin{bmatrix} \vec{R}_O \\ \vec{M}(O) \end{bmatrix}_O} + \underset{③}{\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \frac{mag}{4}\sin\theta\vec{k} \end{bmatrix}_A} \text{ avec } \vec{M}(O).\vec{k}$$

Pour s'affranchir du problème de la réaction de la liaison pivot c'est au point O qu'on va exprimer ce torseur.

$$\vec{M}_1(O) = \vec{M}_1(G) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{GO} = -mg\vec{j} \wedge \overrightarrow{GO}$$

$$\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AO} = -\frac{a}{2}\vec{u} + x\vec{u} = -\left(\frac{a}{2} - x\right)\vec{u}$$

$$\vec{M}_1(O) = mg\left(\frac{a}{2} - x\right)\vec{j} \wedge \vec{u} = -mg\left(\frac{a}{2} - x\right)\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{M}_2(O) = \vec{M}(O) \quad \text{avec} \quad \vec{M}(O).\vec{k} = 0$$

$$\vec{M}_3(O) = \frac{ma}{4}g\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(S) = \begin{bmatrix} \vec{R}_O - mg\vec{j} \\ \vec{M}(O) + \frac{mg}{4}(a\sin\theta - 2a\cos\theta + 4x\cos\theta)\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

$$S \text{ équilibre} \iff \begin{cases} \vec{R}_O = mg\vec{j} \quad \text{(mais on s'en fiche)} & (i) \\ \vec{M}(O) + \frac{mg}{4}(a\sin\theta - 2a\cos\theta - 4x\cos\theta)\vec{k} = 0 & (ii) \end{cases}$$

On projette (ii) suivant $\vec{k} \Rightarrow a\sin\theta - 2a\cos\theta + 4x\cos\theta = 0$

si $\theta_e = \frac{\pi}{4}$ alors $\sin\theta_e = \cos\theta_e \Rightarrow 4x = a \Rightarrow x = \frac{a}{4}$

On peut aussi signaler que dans le cas d'un solide plan une liaison pivot se conduit comme une liaison sphérique.