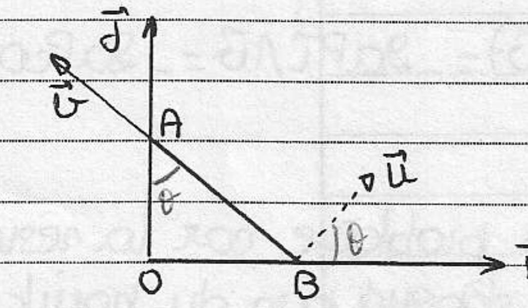
Q11 : Mécanique statique
2008-2009

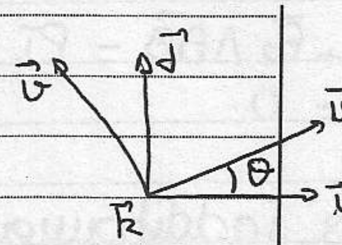
Equilibres de solides et de systèmes de solides

Exercice 1

Dans le plan $(O, \vec\imath, \vec\jmath)$, avec $\vec\jmath$ vertical ascendant, $\vec g = -g\vec\jmath$ désigne l'accélération de la pesanteur, on considère T une barre homogène de mase m, de longueur $2a$ et d'extrémités A et B. On suppose que la barre repose sans frottement sur l'axe $O\vec\jmath$ au point A et sur l'axe $O\vec\imath$ au point B. De plus, on exerce au point B une force $\vec F = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec\imath$

Déterminer la position d'équilibre de la barre et calculer les réactions du support aux points A et B





La première chose à faire pour positionner la barre consiste à déterminer un repère lié à la barre
On note $\vec v$ le vecteur unitaire ; $\vec{BA} = 2a\vec v$
on introduit $\vec u$ le vecteur unitaire tel que $(\vec u, \vec v, \vec k)$ soit une base orthonormée directe.
On désigne par θ l'angle $(\vec\imath, \vec u)$ mesuré autour de $\vec k$

On fait ensuite le bilan de tous les efforts qui s'exercent sur T

$$\mathcal{T}_{eff}(T) = \underbrace{\begin{bmatrix} -mg\vec\jmath \\ 0 \end{bmatrix}_G}_{①} + \underbrace{\begin{bmatrix} P\vec\imath \\ 0 \end{bmatrix}_A}_{②} + \underbrace{\begin{bmatrix} N\vec\jmath \\ 0 \end{bmatrix}_B}_{③} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec\imath \\ 0 \end{bmatrix}_B}_{④}$$

① L'action de la pesanteur se caractérise par un glisseur dont le support passe par G

②, ③, ④ → forces ponctuelles ⇒ moment nul au point d'application

②, ③ réactions purement normale car sans frottement

Pour qu'un solide soit en équilibre il faut et il suffit que le torseur des efforts exercés sur ce solide soit nul.

Pour pouvoir étudier cet équilibre (additionner tous les torseurs) il faut les exprimer au même point.

Partant du principe que moins on en fait mieux on se porte et qu'il y a déjà 2 efforts exprimés en B c'est ce point qu'on choisit pour calculer le torseur résultant

$$\mathcal{M}_1(B) = \mathcal{M}_1(G) + \vec{R}_1 \wedge \vec{GB} = -mg\vec{j} \wedge (-a\vec{v}) = mag\,\vec{j} \wedge \vec{v} = mag\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\mathcal{M}_2(B) = \mathcal{M}_2(A) + \vec{R}_2 \wedge \vec{AB} = P\vec{i} \wedge (-2a\vec{v}) = -2aP\,\vec{i} \wedge \vec{v} = -2aP\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\mathcal{M}_3(B) = \mathcal{M}_4(B) = 0$$

Les résultantes s'additionnent sans problème car la résultante d'un torseur est unique et ne dépend pas du point choisi pour le calcul. On déduit

$$\mathcal{T}_{eff}(T) = \begin{bmatrix} (P - \frac{\sqrt{3}}{2}mg)\vec{i} + (N - mg)\vec{j} \\ a(mg\sin\theta - 2P\cos\theta)\vec{k} \end{bmatrix}_B$$

$$T \text{ équilibre} \Leftrightarrow \mathcal{T}_{eff}(T) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{\sqrt{3}}{2}mg & (1) \\ N = mg & (2) \\ mg\sin\theta - 2P\cos\theta = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow mg\sin\theta - \sqrt{3}mg\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{4\pi}{3}$$

la solution qu'on retient

Soit finalement

$$T \text{ équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \\ N = mg \\ \theta_e = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$