Treillis 1

Dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le treillis élastique plan schématisé ci-dessous.

Le noeud A_3 est fixe, les noeuds A_1 et A_2 sont en appui mobile dans la direction $\vec{i}$, et le noeuds A_4 est libre.

Les barres $[A_1A_3]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$ sont de longueur ℓ, les barres $[A_1A_2], [A_1A_4]$ et $[A_2A_4]$ de longueur $\sqrt{3}\ell$.

Toutes les barres ont la même section S. On note E le module d'Young des barres $[A_1A_3]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$, $\sqrt{3}\,E$ celui des barres $[A_1A_4]$ et $[A_2A_4]$ et enfin $\dfrac{\sqrt{3}}{4}E$ le module d'Young de la barre $[A_1A_2]$.

On exerce :
- une charge $-2F\,\vec{\imath}$ au noeud A_1,
- une charge $F\,\vec{\imath}$ au noeud A_2,
- une charge $-\sqrt{3}F\,\vec{\jmath}$ au noeud A_4,

On note $\vec{e}_{ij}$ le vecteur unitaire qui va du noeud A_i au noeud A_j. T_{ij} désigne la tension qui règne dans la barre A_iA_j. Dans cet exercice on ne cherchera pas à calculer les réactions aux appuis.

1. Ce treillis est constitué de 4 noeuds, soit 8 équations statiques. Quant aux inconnues : Il y de 6 barres (soit 6 tensions) 1 appui fixe (2 inconnues) et 2 appuis mobiles (2*1 inconnue). Le système statique est alors un système de 8 équations à 10 inconnues. Ce treillis est donc hyperstatique de degré 2.

2. Vecteurs unitaires intervenants par la suite
Si on note $\vec{e}_{ij}$ le vecteur unitaire orienté du noeud A_i vers le noeud A_j, on aura :

$$\vec{e}_{12}=\vec{i} \qquad \vec{e}_{13}=\frac{1}{2}\,(\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}) \qquad \vec{e}_{14}=\frac{1}{2}\,(\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j})$$

$$\vec{e}_{34}=\vec{j} \qquad \vec{e}_{23}=\frac{1}{2}\,(-\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}) \qquad \vec{e}_{24}=\frac{1}{2}\,(-\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j})$$

3. Système cinématique

Pour chacune des barres du treillis on écrit la relation qui unit les déplacements des noeuds à la déformation des barres : $(\vec{u}_j-\vec{u}_i).\vec{e}_{ij}=\ell_{ij}\,\varepsilon_{ij}$

Sachant que :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = 0 \qquad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

on aura :

$$\begin{array}{llll}
\text{Barre } [1,2] & \Longrightarrow & (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)\,.\,\vec{i} = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{12} & \Longrightarrow \quad x_2 - x_1 = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{12} \\
\text{Barre } [1,3] & \Longrightarrow & \dfrac{1}{2}(\vec{u}_3 - \vec{u}_1)\,.\,(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}) = \ell\,\varepsilon_{13} & \Longrightarrow \quad x_1 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,\ell\,\varepsilon_{13} \\
\text{Barre } [1,4] & \Longrightarrow & \dfrac{1}{2}(\vec{u}_4 - \vec{u}_1)\,.(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}) = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{14} & \Longrightarrow \quad x_4 - x_1 + \sqrt{3}\,y_4 = 2\sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{14} \\
\text{Barre } [2,3] & \Longrightarrow & \dfrac{1}{2}(\vec{u}_3 - \vec{u}_2)\,.\,(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}) = \ell\,\varepsilon_{23} & \Longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,\ell\,\varepsilon_{23} \\
\text{Barre } [2,4] & \Longrightarrow & \dfrac{1}{2}(\vec{u}_4 - \vec{u}_2)\,.\,(-\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}) = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{24} & \Longrightarrow \quad x_2 - x_4 + \sqrt{3}\,y_4 = 2\sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{24} \\
\text{Barre } [3,4] & \Longrightarrow & (\vec{u}_4 - \vec{u}_3)\,.\vec{j} = \ell\,\varepsilon_{34} & \Longrightarrow \quad y_4 = \ell\,\varepsilon_{34}
\end{array}$$

On déduit de ce système que :

$$x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\ell\,\varepsilon_{13} \qquad\qquad x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\ell\,\varepsilon_{23}$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell\,(6\varepsilon_{14} - 2\varepsilon_{13} - 3\varepsilon_{34}) \qquad\qquad y_4 = \ell\,\varepsilon_{34}$$

avec les conditions de compatibilité :

$$\begin{cases} (4) - (2) = (1) & \Longrightarrow \quad 2\varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{23} = 3\,\varepsilon_{12} \\ \\ (3) + (5) & \Longrightarrow \quad \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{34} = 2\varepsilon_{14} + 2\varepsilon_{24} \end{cases}$$

Ces conditions peuvent aisément s'exprimer en termes de contraintes. Pour cela, il suffit d'utiliser la loi de comportement en élasticité linéaire qui dit que $T_{ij} = E_{ij} S_{ij} \varepsilon_{ij}$. Dans notre cas $E_{14} = E_{24} = \sqrt{3}\,E \qquad E_{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,E \qquad$ et $E_{ij} = E$ dans les autres cas, on aura ainsi, en multipliant chacune des équations par ES :

$$\begin{cases} ES\,(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}) = \dfrac{3}{2}\,ES\,\varepsilon_{12} \\ \\ ES\,(\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{34}) = 2ES(\varepsilon_{14} + \varepsilon_{24}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (i) \quad T_{13} + T_{23} = 2\sqrt{3}\,T_{12} \\ \\ (ii) \quad 2T_{12} + \sqrt{3}T_{34} = T_{14} + T_{24} \end{cases}$$

4. Système statique

Le système statique est obtenu en écrivant les équations d'équilibre de chacun des noeuds du treillis :

$$T_{12}\,\vec{e}_{12} + T_{13}\,\vec{e}_{13} + T_{14}\,\vec{e}_{14} - 2F\,\vec{i} + R_1\,\vec{j} = \vec{0}$$

$$T_{12}\,\vec{e}_{21} + T_{23}\,\vec{e}_{23} + T_{24}\,\vec{e}_{24} + F\,\vec{i} + R_2\,\vec{j} = \vec{0}$$

$$T_{13}\,\vec{e}_{31} + T_{23}\,\vec{e}_{32} + T_{34}\,\vec{e}_{34} + \vec{R}_3 = \vec{0}$$

$$T_{14}\,\vec{e}_{41} + T_{24}\,\vec{e}_{42} + T_{34}\,\vec{e}_{43} + T_{45}\,\vec{e}_{45} - \sqrt{3}F\vec{j} = \vec{0}$$

Dans un premier temps, on ne cherche à calculer que les tensions qui règnent dans les barres. Pour cela, on projette les équations vectorielles ci-dessus uniquement dans la direction de mobilité des noeuds, il vient alors :

$$\left|\begin{array}{l} T_{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,T_{13} + \dfrac{1}{2}\,T_{14} = 2F \\ T_{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,T_{23} + \dfrac{1}{2}\,T_{24} = F \\ \dfrac{1}{2}\,T_{14} - \dfrac{1}{2}\,T_{24} = 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,T_{14} + T_{34} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,T_{24} = -\sqrt{3}F \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} T_{14} = T_{24} \\ T_{34} = -\sqrt{3}\,F - \sqrt{3}\,T_{24} \\ T_{23} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,F - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,T_{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,T_{24} \\ T_{13} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\,F - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,T_{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,T_{24} \end{array}\right.$$

Pour résoudre ce système, il faut maintenant tenir compte des conditions de compatibilté :

$$(i) \quad T_{13} + T_{23} = 2\sqrt{3}\,T_{12} \quad \Longrightarrow \quad 3F - 2T_{12} - T_{24} = 3T_{12} \quad \Longrightarrow \quad T_{24} = 3F - 5T_{12}$$

Dans ces conditions on a :

$$T_{14} = 3F - 5T_{12} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{3}T_{34} = -12F + 15T_{12}$$

En exploitant (ii), la seconde condition de compatibilité, on obtient :

$$2T_{12} - 12F + 15T_{12} = 6F - 10T_{12} \quad \Longrightarrow \quad 27T_{12} = 18F \quad \Longrightarrow \quad T_{12} = \frac{2}{3}F$$

Par suite, on déduit :

$$\left|\begin{array}{ll} T_{12} = \dfrac{2}{3}\,F & \text{traction} \\ T_{13} = sqrt3\,F & \text{traction} \\ T_{14} = -\dfrac{F}{3} & \text{compression} \\ T_{23} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,F & \text{traction} \\ T_{24} = -\dfrac{F}{3} & \text{compression} \\ T_{34} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,F & \text{compression} \end{array}\right.$$

5. Déplacements

Pour exprimer les déplacements en fonction des efforts exercés sur les barres, on utilise à nouveau la loi de comportement en élasticité linéaire : $T_{ij} = E_{ij}\, S\, \varepsilon_{ij}$. On obtient :

$$\vec{u}_1 = \frac{2F\ell}{ES}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \frac{2F\ell}{ES}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_4 = \frac{2F\ell}{ES}\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

6. Représentation graphique

Treillis 2

Dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le treillis élastique plan schématisé ci-dessous.

Le noeud A_3 est fixe, les noeuds A_1 et A_2 sont en appui mobile dans la direction $\vec{i}$, et les noeuds A_4 et A_5 sont libres.

Les barres $[A_3A_4]$ et $[A_3A_5]$ sont de longueur ℓ, les barres $[A_1A_2], [A_1A_3], [A_2A_3]$ et $[A_4A_5]$ de longueur $\sqrt{3}\ell$ et les barres $[A_1A_4]$ et $[A_2A_5]$ sont de longueur 2ℓ.

Toutes les barres ont la même section S. On note $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}E$ le module d'Young de la barre $[A_4A_5]$, toutes les autres sont de module d'Young E.

On exerce :
- une charge $F\,\vec{\imath}$ au noeud A_1,
- une charge $-\dfrac{1}{2}F\,\vec{\imath}$ au noeud A_2,
- une charge $F\,\vec{\jmath}$ au noeud A_4,
- une charge $-\sqrt{3}F\,\vec{\imath}$ au noeud A_5,

On note $\vec{e}_{ij}$ le vecteur unitaire qui va du noeud A_i au noeud A_j. T_{ij} désigne la tension qui règne dans la barre A_iA_j. Dans cet exercice on ne cherchera pas à calculer les réactions aux appuis.

1. Donner le degré de staticité du treillis.

2. Expliciter tous les vecteurs $\vec{e}_{ij}$

3. Ecrire les équations du système cinématique et exprimer les déplacements aux noeuds en fonction des allongements relatifs des barres.

4. Ecrire les équations du système statique. Calculer les tensions qui règnent dans les barres. Préciser pour chacune d'entre elles si elles sont en traction ou en compression.

5. Exprimer alors les déplacements des noeuds en fonction de F, ℓ, E et S

6. Représenter sur un même graphique le treillis initial et son déformé.

1. Ce treillis est constitué de 5 noeuds, soit 10 équations statiques. Quant aux inconnues : Il y de 8 barres (soit 8 tensions) 1 appui fixe (2 inconnues) et 2 appuis mobiles (2*1 inconnue). Le système statique est alors un système de 10 équations à 12 inconnues. Ce treillis est donc hyperstatique de degré 2.

2. Vecteurs unitaires intervenants par la suite

Si on note $\vec{e}_{ij}$ le vecteur unitaire orienté du noeud A_i vers le noeud A_j, on aura :

$$\vec{e}_{12} = \vec{e}_{45} = \vec{i} \qquad \vec{e}_{13} = \frac{1}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{j} \qquad \vec{e}_{34} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_{14} = \vec{e}_{25} = \vec{j} \qquad \vec{e}_{23} = -\frac{1}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{j} \qquad \vec{e}_{35} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}$$

3. Système cinématique

Pour chacune des barres du treillis on écrit la relation qui unit les déplacements des noeuds à la déformation des barres : $(\vec{u}_j - \vec{u}_i).\vec{e}_{ij} = \ell_{ij}\,\varepsilon_{ij}$

$$\begin{array}{llll}
\text{Barre } [1,2] & \Longrightarrow & (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)\,.\,\vec{i} = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{12} & \Longrightarrow \quad x_2 - x_1 = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{12} \\
\text{Barre } [1,3] & \Longrightarrow & -\frac{1}{2}\vec{u}_1\,.\,(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}) = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{13} & \Longrightarrow \quad x_1 = -2\sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{13} \\
\text{Barre } [1,4] & \Longrightarrow & (\vec{u}_4 - \vec{u}_1)\,.\,\vec{j} = 2\,\ell\,\varepsilon_{14} & \Longrightarrow \quad y_4 = 2\,\ell\,\varepsilon_{14} \\
\text{Barre } [2,3] & \Longrightarrow & -\frac{1}{2}\vec{u}_2\,.\,(-\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}) = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{23} & \Longrightarrow \quad x_2 = 2\sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{23} \\
\text{Barre } [2,5] & \Longrightarrow & (\vec{u}_5 - \vec{u}_2)\,.\,\vec{j} = 2\,\ell\,\varepsilon_{25} & \Longrightarrow \quad y_5 = 2\,\ell\,\varepsilon_{25} \\
\text{Barre } [3,4] & \Longrightarrow & \frac{1}{2}\vec{u}_4\,.\,(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}) = \ell\,\varepsilon_{34} & \Longrightarrow \quad -\sqrt{3}\,x_4 + y_4 = 2\,\ell\,\varepsilon_{34} \\
\text{Barre } [3,5] & \Longrightarrow & \frac{1}{2}\vec{u}_5\,.\,(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}) = \ell\,\varepsilon_{35} & \Longrightarrow \quad \sqrt{3}\,x_5 + y_5 = 2\,\ell\,\varepsilon_{35} \\
\text{Barre } [4,5] & \Longrightarrow & (\vec{u}_5 - \vec{u}_4)\,.\,\vec{i} = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{45} & \Longrightarrow \quad x_5 - x_4 = \sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{45}
\end{array}$$

On déduit de ce système que :

$$x_1 = -2\sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{13} \qquad x_2 = 2\sqrt{3}\,\ell\,\varepsilon_{23}$$

$$x_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\ell\,(\varepsilon_{14} - \varepsilon_{34}) \qquad y_4 = 2\,\ell\,\varepsilon_{14}$$

$$x_5 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\ell\,(\varepsilon_{35} - \varepsilon_{25}) \qquad y_5 = 2\,\ell\,\varepsilon_{25}$$

avec les conditions de compatibilité :

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{35} + \varepsilon_{34} - \varepsilon_{25} - \varepsilon_{14} = \frac{3}{2}\,\varepsilon_{45} \end{cases}$$

Ces conditions peuvent aisément s'exprimer en termes de contraintes. Pour cela, il suffit d'utiliser la loi de comportement en élasticité linéaire qui dit que $T_{ij} = E_{ij}S_{ij}\varepsilon_{ij}$. Dans notre cas $E_{45} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,E$ et $E_{ij} = E$ dans les autres cas, on aura ainsi, en multipliant chacune des équations par ES :

$$\begin{cases} ES\,(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}) = \frac{1}{2}\,ES\,\varepsilon_{12} \\ ES\,(\varepsilon_{35} + \varepsilon_{34} - \varepsilon_{25} - \varepsilon_{14}) = \frac{3}{2}\,ES\,\varepsilon_{45} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T_{13} + T_{23} = \frac{1}{2}\,T_{12} \\ T_{35} + T_{34} - T_{25} - T_{14} = \frac{3}{2}\,ES\,\varepsilon_{45} = \frac{2\sqrt{3}}{3}T_{45} \end{cases}$$

4. Système statique

Le système statique est obtenu en écrivant les équations d'équilibre de chacun des noeuds du treillis :

$$
\begin{array}{l}
T_{12}\,\vec{e}_{12} + T_{13}\,\vec{e}_{13} + T_{14}\,\vec{e}_{14} + F\,\vec{i} = \vec{0} \\
T_{12}\,\vec{e}_{21} + T_{23}\,\vec{e}_{23} + T_{25}\,\vec{e}_{25} - \dfrac{1}{2}\,F\,\vec{i} = \vec{0} \\
T_{13}\,\vec{e}_{31} + T_{23}\,\vec{e}_{32} + T_{34}\,\vec{e}_{34} + T_{35}\,\vec{e}_{35} = \vec{0} \\
T_{14}\,\vec{e}_{41} + T_{34}\,\vec{e}_{43} + T_{45}\,\vec{e}_{45} + F\,\vec{j} = \vec{0} \\
T_{25}\,\vec{e}_{52} + T_{35}\,\vec{e}_{53} + T_{45}\,\vec{e}_{54} - \sqrt{3}F\,\vec{i} = \vec{0}
\end{array}
$$

Dans un premier temps, on ne cherche à calculer que les tensions qui règnent dans les barres. Pour cela, on projette les équations vectorielles ci-dessus uniquement dans la direction de mobilité des noeuds, il vient alors :

$$
\left|\begin{array}{l}
T_{12} + \dfrac{1}{2}\,T_{13} + F = 0 \\
-T_{12} - \dfrac{1}{2}T_{23} - \dfrac{1}{2}\,F = 0 \\
\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,T_{34} + T_{45} = 0 \\
-\,T_{14} - \dfrac{1}{2}\,T_{34} + F = 0 \\
-T_{45} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,T_{35} - \sqrt{3}\,F = 0 \\
-T_{25} - \dfrac{1}{2}\,T_{35} = 0
\end{array}\right.
\quad \Longrightarrow \quad
\left|\begin{array}{l}
T_{13} = -2T_{12} - 2F \\
T_{23} = -2T_{12} - F \\
T_{45} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,T_{34} \\
T_{14} = -\dfrac{1}{2}\,T_{34} + F \\
T_{35} = T_{34} - 2\,F \\
T_{25} = -\dfrac{1}{2}\,T_{34} + F
\end{array}\right.
$$

Pour résoudre ce système, il faut maintenant tenir compte des conditions de compatibilté :

$(i)\quad T_{13} + T_{23} = \dfrac{1}{2}\,T_{12}$

$(ii)\quad T_{35} + T_{34} - T_{25} - T_{14} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,T_{45}$

En exploitant (i), on obtient : $\quad -(2T_{12}+2F)-(2T_{12}+F) = \dfrac{1}{2}\,T_{12} \quad \Longrightarrow \quad T_{12} = -\dfrac{2}{3}F$

Quant à l'équation (ii), on aura : $T_{34} - 2F + T_{34} + \dfrac{1}{2}\,T_{34} - F + \dfrac{1}{2}\,T_{34} - F = -T_{34}$

Soit $T_{34} = F$

Par suite, on déduit :

$$\left|\begin{array}{ll}
T_{12} = T_{23} = -\dfrac{2}{3}\,F & \text{compression} \\[2mm]
T_{13} = -\dfrac{1}{3}\,F & \text{compression} \\[2mm]
T_{14} = T_{25} = \dfrac{1}{2}\,F & \text{traction} \\
T_{34} = F & \text{traction} \\[4mm]
T_{35} = -F & \text{compression} \\
T_{45} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,F & \text{compression}
\end{array}\right.$$

5. Déplacements

Pour exprimer les déplacements en fonction des efforts exercés sur les barres, on utilise à nouveau la loi de comportement en élasticité linéaire : $T_{ij} = E_{ij}\,S\,\varepsilon_{ij}$. On obtient :

$$\vec{u}_1 = \frac{2\sqrt{3}\,F\ell}{3\,ES}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = -\frac{4\sqrt{3}\,F\ell}{3\,ES}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_4 = \frac{F\ell}{3\,ES}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_5 = \frac{F\ell}{ES}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$$

6. Représentation graphique