Exercice 1

1.[1 point] Un système Σ de deux solides $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est à l'équilibre s'il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \\ \text{et} \\ \mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \\ \text{et} \\ \mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \\ \text{et} \\ \mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Cela revient à dire que les deux solides composant le système sont eux-mêmes à l'équilibre.

2.a.[1,5 points] Les efforts exercés sur la barre $\mathcal{B}_1$ sont :
$\rightarrow$ la pesanteur $-mg\vec{j}$ exercée en G_1, de moment nul en G_1,
$\rightarrow$ la réaction à la rotule $\vec{R_B}$ exercée en B, de moment nul en B,
$\rightarrow$ la réaction du support $T\vec{i} + N\vec{j}$ exercée en A, de moment nul en A.

On utilise la formule de déplacement des moments (formule "BABAR") :

$$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{pesanteur}(B) &= \mathcal{M}_{pesanteur}(G_1) + \overrightarrow{BG_1} \wedge -mg\vec{j} \\ &= -\frac{l}{2}\vec{v} \wedge -mg\vec{j} \\ &= -\frac{mgl}{2}\sin\alpha\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{pesanteur}(B) &= \mathcal{M}_{pesanteur}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge -mg\vec{j} \\ &= -l\vec{v} \wedge T\vec{i} + N\vec{j} \\ &= l(T\cos\alpha + N\sin\alpha)\vec{k} \end{aligned}$$

On a donc obtenu le torseur des efforts suivant pour $\mathcal{B}_2$ exprimé en B :

$$\mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} \vec{R_B} + N\vec{j} + T\vec{i} - mg\vec{j} \\ l(T\cos\alpha + N\sin\alpha - \frac{mg}{2}\sin\alpha)\vec{k} \end{bmatrix}_B$$

2.b.[1,5 points] On doit maintenant définir le torseur des efforts exercés sur le système Σ. On peut donc soit calculer le torseur de la barre $\mathcal{B}_2$ et appliquer

le principe d'action-réaction à la réaction en B, soit lister uniquement les forces extérieures au système.
C'est cette dernière méthode que l'on utilisera. On a donc les efforts suivants :
$\rightarrow$ la pesanteur $-mg\vec{j}$ exercée en G_1, de moment nul en G_1,
$\rightarrow$ la pesanteur $-mg\vec{j}$ exercée en G_2,de moment nul en G_2,
$\rightarrow$ la réaction du support $P\vec{i}+Q\vec{j}$ exercée en C, de moment nul en C,
$\rightarrow$ la réaction du support $T\vec{i}+N\vec{j}$ exercée en A, de moment nul en A.

On obtient après déplacement des moments vers le point B :

$$\begin{bmatrix} Q\vec{j}+P\vec{i}+N\vec{j}+T\vec{i}-2mg\vec{j} \\ l(T\cos\alpha+N\sin\alpha-\frac{mg}{2}\sin\alpha+\frac{mg}{2}\sin\theta+P\cos\theta-Q\sin\theta)\vec{k} \end{bmatrix}_B$$

3.[0,5 point] Les équations d'équilibre du système de solide Σ s'obtiennent en annulant les forces et moments des deux torseurs précédemment obtenus. On arrive donc au système vectoriel suivant :

$$\begin{cases} \vec{R_B}+N\vec{j}+T\vec{i}-mg\vec{j}=\vec{0} \\ l(T\cos\alpha+N\sin\alpha-\frac{mg}{2}\sin\alpha)\vec{k}=\vec{0} \\ Q\vec{j}+P\vec{i}+N\vec{j}+T\vec{i}-2mg\vec{j}=\vec{0} \\ l(T\cos\alpha+N\sin\alpha-\frac{mg}{2}\sin\alpha+\frac{mg}{2}\sin\theta+P\cos\theta-Q\sin\theta)\vec{k}=\vec{0} \end{cases}$$

Ce qui, en projetant sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$, nous amène au système scalaire suivant :

$$\begin{cases} \vec{R_B}\cdot\vec{i}+T=0 \\ \vec{R_B}\cdot\vec{j}+N-mg=0 \\ T\cos\alpha+N\sin\alpha-\frac{mg}{2}\sin\alpha=0 \\ Q+N-2mg=0 \\ P+T=0 \\ T\cos\alpha+N\sin\alpha-\frac{mg}{2}\sin\alpha+\frac{mg}{2}\sin\theta+P\cos\theta-Q\sin\theta \end{cases}$$

4.a.[1 point] On utilise la relation $T\cos\alpha+N\sin\alpha-\frac{mg}{2}\sin\alpha=0$, pour déduire α en fonction de N et T. En divisant par $\cos\alpha$, on obtient :

$$T+N\tan\alpha-\frac{mg}{2}\tan\alpha=0$$

Ce qui implique l'égalité suivante :

$$\tan\alpha=\frac{2T}{mg-2N}$$

On pouvait aussi se contenter de recopier l'équation $T\cos\alpha+N\sin\alpha-\frac{mg}{2}\sin\alpha=0$, qui ne concernait que α, N et T.

4.b.[1 point] En combinant

$$T\cos\alpha + N\sin\alpha - \frac{mg}{2}\sin\alpha = 0$$

et

$$T\cos\alpha + N\sin\alpha - \frac{mg}{2}\sin\alpha + \frac{mg}{2}\sin\theta + P\cos\theta - Q\sin\theta$$

on déduit de la même manière qu'auparavant que

$$\tan\theta = \frac{2P}{2Q - mg}$$

5.a.[0,5 point] Il s'agit de l'équation

$$\|T\| \leq f\,\|N\|$$

où $f \geq 0$ est le coefficient de frottements.

5.b.[1 point] On déduit grâce aux calculs de la question 4.a. que

$$\tan\alpha \geq \frac{2T}{mg - 2f\,|T|}$$

5.c.[1 point] De la même manière, on $\tan\theta \geq \frac{2|Q|}{(2Q-mg)f}$

6.[1 point] On n'a plus de frottements en C, ce qui revient à dire que $Q = 0$. On déduit facilement des équations d'équilibre vues au-dessus les équations suivantes :

$$\begin{cases} N = 2mg \\ T = P \\ P = -\frac{mg}{2} \\ \tan\alpha = -\frac{2T}{3mg} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Exercice 2

1.[0,5 point] On peut déterminer le degré de staticité de deux façons différentes : en étudiant le nombre d'inconnues et d'équations statiques, ou alors en déterminant le nombre d'équations de compatibilité.
Dans un souci de rapidité, on utilisera la première méthode.

→ Le treillis comporte 7 barres, dont les tensions sont à déterminer, ce qui fait 7 inconnues,
→ Le noeud 5 est en appui fixe, donc les composantes de la réaction suivant $\vec{i}$ et $\vec{j}$ seront 2 inconnues,
→ Le noeud 1 est en appui mobile, donc la réaction selon $\vec{j}$ sera une inconnue,

$\rightarrow$ Le noeud 4 est en appui mobile, donc la réaction selon $\vec{i}$ sera une inconnue. Nous avons donc 11 inconnues statiques.

Le treillis comporte 5 noeuds, ce qui nous permettra d'obtenir 5 équations vectorielles, donc 10 équations scalaires après projection.
Le treillis est donc hyperstatique de degré 1.

2.[0,5 point] Les vecteurs unitaires $\vec{e_{ij}}$ sont les suivants :

$\vec{e_{12}} = -\vec{j}$
$\vec{e_{15}} = \vec{i}$
$\vec{e_{23}} = \vec{i}$
$\vec{e_{25}} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$
$\vec{e_{34}} = \vec{i}$
$\vec{e_{35}} = \vec{j}$
$\vec{e_{25}} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

3.a.[1 point] Le système statique est l'ensemble des équations liant les déformations des barres aux déplacements des noeuds.
D'un point de vue mathématique, il s'exprime par la relation suivante :

$$(u_j - u_i) \cdot \vec{e_{ij}} = l_{ij}\varepsilon_{ij}$$

avec i, j les noeuds reliés par une et une seule barre, u_j et u_i les déplacements des noeuds i et j, l_{ij} la longueur de la barre entre les noeud i et j et ε_{ij} la déformation de la barre entre les noeuds i et j.

3.b.[1 point] On utilise la relation décrite au-dessus pour chaque barre, avec $u_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$. On obtiendra ainsi 7 équations cinématiques.
Notons tout d'abord que la présence des différents induit que $x_4 = x_5 = y_5 = y_1 = 0$. On obtient donc finalement les équations suivantes :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} l\varepsilon_{12} \\ \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = l\varepsilon_{15} \\ \begin{pmatrix} -x_3 \\ -y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} l\varepsilon_{35} \\ \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{l}{2}\varepsilon_{15} \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{l}{2}\varepsilon_{23} \\ \begin{pmatrix} -x_3 \\ y_4 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{l}{2}\varepsilon_{34} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -y_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = l\varepsilon_{54} \end{cases}$$

Une résolution rapide nous amène à :

$$\begin{cases} y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} l\varepsilon_{12} \\ x_3 = -\frac{l}{2} l\varepsilon_{34} \\ y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} l\varepsilon_{35} \\ x_1 = -\frac{l}{2}\varepsilon_{15} \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} y_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}} l\varepsilon_{34} \\ x_2 = -\frac{l}{2}\varepsilon_{34} - \frac{l}{2}\varepsilon_{23} \\ x_2 = -2l\varepsilon_{25} + \frac{3}{2} l\varepsilon_{12} \end{cases}$$

3.c.[1 point] La loi de comportement en élasticité linéaire nous affirme que la contrainte est proportionnelle à la déformation. Plus précisément, on a la relation suivante (avec les notations usuelles) liant les tensions et les déformations des barres :

$$T_{ij} = E_{ij} S_{ij} \varepsilon_{ij}$$

3.d.[1 point] L'équation a montrer provient du système cinématique. Il s'agit de l'unique équation de compatibilité puisque le treillis est hyperstatique de degré 1.
Pour la trouver, il suffit d'utiliser les deux valeurs de x_2 trouvées lors de la résolution du système cinématique, puis d'appliquer la loi de comportement en élasticité linéaire tenant bien compte de la valeur du module de Young de la barre entre les noeuds 1 et 2. On a donc :

$$x_2 = -\frac{l}{2}\varepsilon_{34} - \frac{l}{2}\varepsilon_{23} = -2l\varepsilon_{25} + \frac{3}{2} l\varepsilon_{12}$$

ainsi il vient :

$$-\varepsilon_{34} - \varepsilon_{23} + 4\varepsilon_{25} - 3\varepsilon_{12} = 0$$

ce qui nous donne en explicitant les valeurs des différentes déformations :

$$-\frac{T_{34}}{ES} - \frac{T_{23}}{ES} + 4\frac{T_{25}}{ES} - 3\frac{T_{12}}{\sqrt{3}ES} = 0$$

qui est clairement équivalent à la relation demandée.

4.a.[1 point] Le système statique est l'ensemble des équations d'équilibre de chaque noeud. Mathématiquement et avec les notation usuelles, cela se traduit par les relations suivantes :

$$\sum T_{ij} \vec{e_{ij}} + \vec{F_i} + \vec{R_i}$$

qui traduisent le fait qu'à l'équilibre, la somme des forces appliquées à chacun des noeuds est nulle.

4.b.[1 point] Dans un souci de simplification, nous n'écrirons que les équations qui nous serviront à calculer les tensions des barres. On n'écrira donc pas l'équation d'équilibre du noeud 5 qui est en appui fixe. On a les équations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} T_{12}\vec{e_{12}} + T_{15}\vec{e_{15}} + \vec{R_1} - F\vec{i} = 0 & (1) \\ T_{12}\vec{e_{21}} + T_{23}\vec{e_{23}} + T_{25}\vec{e_{25}} - \frac{1}{2}F - \frac{\sqrt{3}}{2}F = 0 & (2) \\ T_{23}\vec{e_{32}} + T_{34}\vec{e_{34}} + T_{35}\vec{e_{35}} + F\vec{j} = 0 & (3) \\ T_{34}\vec{e_{43}} + T_{45}\vec{e_{45}} + \vec{R_4} - F\vec{j} = 0 & (4) \end{cases}$$

L'équation (1) nous donne une seule équation scalaire utilisable (i.e. sans réaction) :

$$T_{15} = F$$

De même, l'équation (4) nous donnera l'équation scalaire suivante :

$$T_{45} = F$$

L'équation (2) quant à elle impliquera les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} T_{23} + \frac{1}{2}T_{25} = \frac{1}{2}F & (5) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}T_{25} + T_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}F & (6) \end{cases}$$

Enfin, (3) nous donne :

$$\begin{cases} T_{34} = T_{23} \\ T_{35} = -F \end{cases} \quad (7)$$

4.c.[1,5 points] Il faut maintenant déterminer les valeurs des tensions que nous ne connaissons pas encore. Pour cela on va utiliser les équations (5), (6) et (7).
En effet, on déduit de (5) que $T_{25} = F - T_{23}$ et de (6) que $\sqrt{3}T_{12} = \frac{3}{2}(F - T_{25})$. On utilise ensuite la relation prouvée à la question 3.d. pour trouver que :

$$\begin{cases} T_{23} = \frac{4}{13}F \\ T_{25} = \frac{5}{13}F \\ T_{12} = \frac{4\sqrt{3}}{13}F \end{cases}$$

Les tensions positives indiquent que les barres sont en compression, alors que les tensions positives indiquent que les barres sont en traction.

5.[1 point] Il suffit d'utiliser les valeurs des T_{ij} trouvées plus haut dans la formule $\varepsilon_{ij} = \frac{T_{ij}}{E_{ij}S_{ij}}$ pour connaitre les valeurs des déplacements des noeuds, sachant que $Fl = ES$. On arrive aux valeurs suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{13} \\ y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{13} \\ x_3 = -\frac{2}{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -\frac{2}{13} \\ y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

6.[0,5 point]