Exercice 5

Soit (O, A, B, C) les sommets d'un carré de coté a situé dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le champ de vecteurs équiprojectif $\vec{u}$ défini par $\vec{u}(O) = \overrightarrow{AC}$, $\vec{u}(A) = \overrightarrow{BO}$ et $\vec{u}(M) = 0$ pour tous les points M situés sur l'axe $D\vec{k}$ (où D est le centre du carré)

1. Calculer la résultante et l'axe central de $\mathcal{T}$
2. Calculer $\vec{u}(M)$ pour tous les points M de l'espace

1. Si $\vec{u}$ définit un torseur alors $\exists! \vec{R} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$\forall (O,P) \in \mathcal{E}$ $\quad \vec{u}(P) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP}$

$$\vec{u}(A) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OA} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ ar = -2a \\ -aq = 0 \end{cases}$$

$r = -\cancel{1}2 \quad q = 0 \quad$ p indéterminé

$\forall M \in D\vec{k} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}(M) = 0$

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OM} \Rightarrow 0 = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} +a = qz - \frac{ar}{2} \\ -a = \frac{a}{2}r - pz \\ 0 = ap - aq \end{cases}$$

Ce système doit être vérifié $\forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow p = 0$

et finalement $\vec{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. $\forall P \in \mathcal{E}$ $\quad \vec{u}(P) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + y \\ 2a - x \\ 0 \end{pmatrix}$

Rem $\vec{u}(O) \cdot \vec{R} = 0 \Rightarrow$ ce torseur est un glisseur

dans ce cas $\Delta = \{P ; \vec{u}(P) = 0\}$

$$\Delta = \left\{P \in \mathcal{E} ; \vec{OP} \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ z \end{pmatrix} \right\}$$