Exercice 1

Dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, avec $\vec{j}$ vertical ascendant, $\vec{g}=-g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère le système Σ constitué :

* d'un disque D homogène de masse m, de centre C et de rayon R.
* d'une barre S homogène de masse M, d'extrémités A et C et de longueur ℓ.

On suppose que le disque est astreint à rester en contact avec l'axe $O\vec{j}$ au point I, et que l'extrémité A de la barre reste sur l'axe $O\vec{i}$. On note $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $\vec{AC}=\ell\vec{v}$, on intoduit $\vec{u}$ le vecteur tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ soit orthonormé directe et on note $\alpha=(\vec{i},\vec{u})$ (on suppose que $\alpha\in[0,\pi]$.

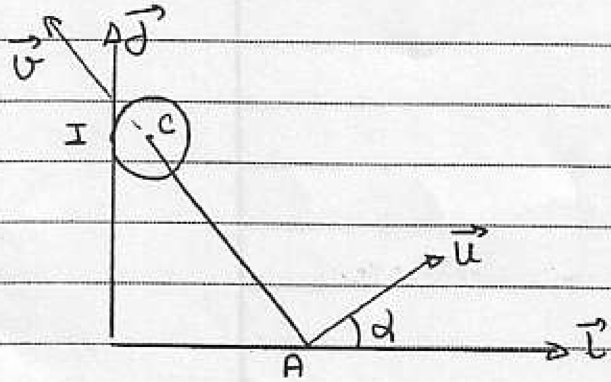
On suppose que la liaison entre le disque et la barre est une liaison pivot parfaite d'axe $C\vec{k}$.

On note $N\vec{i}+T\vec{j}$ la réaction du batî fixe sur D au point I, on note $Q\vec{i}+P\vec{j}$ la réaction du batît fixe sur S au point A et on suppose que la réaction $Q\vec{i}+P\vec{j}$ satisfait à une loi de Coulomb de coefficient f.

1. A quelle condition un système de solides est-il en équilibre ?

2. Ecrire les équations d'équilibre de Σ et en déduire la valeur de P, Q, N et T.

3. A l'aide de la loi de Coulomb exprimer α en fonction de f, M et m. On suppose que $f=\dfrac{2}{3}$ et que $M=2m$ déterminer la position d'équilibre de Σ.



Un système de solides est en équilibre lorsque chaque solide qui le constitue est en équilibre

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}eff(S)=0 \\ \mathcal{T}eff(D)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}eff(\Sigma)=0 \\ \mathcal{T}eff(S)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}eff(\Sigma)=0 \\ \mathcal{T}eff(D)=0 \end{cases}$$

On fait le bilan des efforts qui s'exercent sur S, sur D et sur Σ et on jugera après lesquels on exploitera - les efforts qui s'exercent sur Σ sont souvent (mais pas toujours) intéressants car du fait du principe de l'action-réaction les efforts intérieurs vont se simplifier

$$\mathcal{T}eff(S)=\begin{bmatrix} -Mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} \vec{R_c} \\ \vec{\mathcal{M}}(C) \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} Q\vec{i}+P\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad \text{avec } \vec{\mathcal{M}}(C)\cdot\vec{k}=0$$

en fait $\vec{\mathcal{M}}(C)=0$ car dans le plan les liaisons pivots se conduisent comme des liaisons sphériques

$$\mathcal{T}_{eff}(D) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} -\vec{R_c} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} N\vec{i} + T\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_I$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \underset{①}{\begin{bmatrix} -Mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G} + \underset{②}{\begin{bmatrix} N\vec{i} + T\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_I} + \underset{③}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_C} + \underset{④}{\begin{bmatrix} Q\vec{i} + P\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A}$$

$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma)$ est intéressant pour 2 raisons
- R_c a disparu
- la résultante est exprimée sous une forme commode

On va aussi privilégier $\mathcal{T}_{eff}(D)$ car 2 élts sont déjà exprimés au C
le point C est aussi adapté au calcul de $\mathcal{T}_{eff}(\Sigma)$

$$\vec{\mathcal{M}}_1(C) = \vec{\mathcal{M}}_2(C) = 0 \qquad \vec{\mathcal{M}}_3(C) = \vec{R}_3 \wedge \vec{IC} = (N\vec{i} + T\vec{j}) \wedge R\vec{i} = -RT\vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(D) = \begin{bmatrix} -\vec{R_c} + N\vec{i} + (T - mg)\vec{j} \\ -RT\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

$$\vec{\mathcal{M}}'_1(C) = \vec{\mathcal{M}}'_1(G) + \vec{R}'_1 \wedge \vec{GC} = -Mg\vec{j} \wedge \frac{l}{2}\vec{v} = -\frac{Ml}{2} g \sin\alpha \, \vec{k}$$
$$\vec{\mathcal{M}}'_2(C) = \mathcal{M}'_2(I) + \vec{R}'_2 \wedge \vec{IC} = (N\vec{i} + T\vec{j}) \wedge R\vec{i} = -RT\vec{k}$$
$$\vec{\mathcal{M}}'_3(C) = 0$$
$$\vec{\mathcal{M}}'_4(C) = (Q\vec{i} + P\vec{j}) \wedge l\vec{v} = l(Q\cos\alpha + P\sin\alpha)\,\vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} (N+Q)\vec{i} + (T + P - Mg - mg)\vec{j} \\ \left[lQ\cos\alpha + lP\sin\alpha - \frac{Ml}{2} g\sin\alpha - RT\right]\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

On déduit les équations ~~du mouve~~ d'équilibre

$$\begin{array}{l|l} (1) & \vec{R_c} = N\vec{i} + (T - mg)\vec{j} \\ (2) & T = 0 \\ (3) & N + Q = 0 \\ (4) & T + P = (M + m)g \\ (5) & lQ\cos\alpha + lP\sin\alpha - \frac{Ml}{2} g\sin\alpha - RT = 0 \end{array}$$

La première équation nous réjouit profondément car elle permet de calculer la réaction de la liaison pivot entre le disque et la barre si jamais on est tenté de le faire...

(2) $\Rightarrow T = 0$

(4) $\Rightarrow P = (M + m) g$

(5) $\Rightarrow Q\cos\alpha - \left(\frac{M}{2} g - P\right) \sin\alpha = -\left(\frac{M}{2} + m\right) g \sin\alpha$

$$Q = -\left(\frac{M}{2} + m\right) g \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

(3) $\Rightarrow N = \left(\frac{M}{2} + m\right) g \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3. En statique la loi de Coulomb stipule que $|Q| < fP$

La condition de contact unilatéral en I impose $N > 0$ et par conséquent $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$

Alors $|Q| = \left(\frac{M}{2} + m\right) g \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

sachant que $M = 2m$ on a $|Q| = 2mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad P = 3mg$

$|Q| < fP \Rightarrow 2mg \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < \frac{2}{3} * 3\, mg$ $\quad$ (car $f = \frac{2}{3}$)

$$\operatorname{tg}\alpha < 1$$

Il y aura donc équilibre du système tant que $\operatorname{tg}\alpha < 1$

soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

Exercice 2

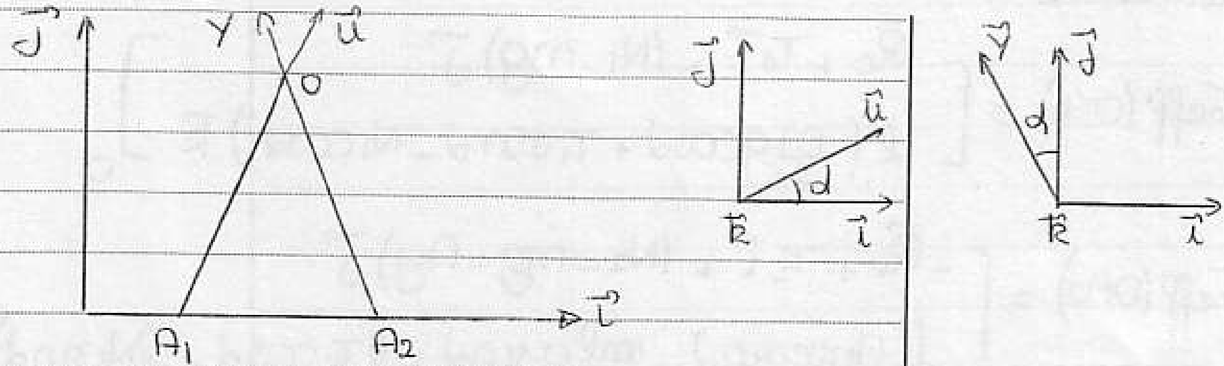
Une double-échelle se compose de deux échelles simples homogènes (OA_1) et (OA_2) de même longueur ℓ et de même masse m. On désignera par G_1 et G_2 leur centre de gravité.

. Les deux échelles sont articulées en O par une liaison pivot parfaite.

. Un individu de masse M se trouve sur l'échelle (OA_2). On suppose que son centre de gravité se situe en un point P de (OA_2) de telle sorte que l'action de l'homme sur l'échelle soit équivalente à une force ponctuelle $-Mg\vec{j}$ exercée en P. (On peut introduire $x > 0$ tel que $\overline{OP} = x$).

. Les pieds A_1 et A_2 de chacune des deux échelles sont en contact ponctuel avec le sol. On note respectivement $T_1\vec{i} + N_1\vec{j}$ et $T_2\vec{i} + N_2\vec{j}$ les réactions ponctuelles du sol sur (OA_1) et (OA_2) et on suppose que ces contacts sont décrits par une loi de Coulomb de même coefficient de frottement f.

1. Déterminer les composantes T_1, N_1, T_2 et N_2 des réactions aux appuis lorsque l'échelle est en équilibre.
2. Déterminer quel pied est susceptible de glisser en premier.



On introduit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs unitaires tels que $\vec{A_1O} = \ell\vec{u}$ et $\vec{A_2O} = \ell\vec{v}$

on note $\alpha = (\vec{i},\vec{u}) = (\vec{j},\vec{v})$ mesuré autour de $\vec{k}$

$$\mathcal{T}_{eff}(\overline{OA_1}) = \underset{(1)}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_1}} + \underset{(2)}{\begin{bmatrix} T_1\vec{i}+N_1\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{A_1}} + \underset{(3)}{\begin{bmatrix} \vec{R_0} \\ \vec{M}(O) \end{bmatrix}_{O}}$$

avec $\vec{M}(O)\cdot\vec{k} = 0$

en fait $\vec{M}(O) = 0$ car système situé dans le plan

$$\mathcal{T}_{eff}(\overline{OA_2}) = \overset{(1')}{\begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_2}} + \overset{(2')}{\begin{bmatrix} T_2\vec{i}+N_2\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{A_2}} + \overset{(3')}{\begin{bmatrix} -\vec{R_0} \\ 0 \end{bmatrix}_{O}} + \overset{(4')}{\begin{bmatrix} -Mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{P}}$$

Pas sûr que le $\mathcal{T}_{eff}(\Sigma)$ présente un intérêt quelconque on va garder $\mathcal{T}_{eff}(OA_1)$ et $\mathcal{T}_{eff}(OA_2)$ au point O à cause de la liaison pivot.

$$\mathcal{M}_1(O) = -mg\vec{j} \wedge \overrightarrow{G_1O} = -mg\vec{j} \wedge \frac{l}{2}\vec{u} = \frac{ml}{2}g\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$\mathcal{M}_2(O) = (T_1\vec{i} + N_1\vec{j}) \wedge \overrightarrow{A_1O} = (T_1\vec{i} + N_1\vec{j}) \wedge l\vec{u} = l\,(T_1\sin\alpha - N_1\cos\alpha)\vec{k}$$

$$\mathcal{M}_3(O) = 0$$

$$\mathcal{M}'_1(O) = -mg\vec{j} \wedge \overrightarrow{G_2O} = -mg\vec{j} \wedge \frac{l}{2}\vec{y} = -\frac{ml}{2}g\sin\alpha\,\vec{k}$$

$$\mathcal{M}'_2(O) = (T_2\vec{i} + N_2\vec{j}) \wedge l\vec{y} = l\,(T_2\cos\alpha + N_2\sin\alpha)\vec{k}$$

$$\mathcal{M}'_3(O) = 0$$

$$\mathcal{M}'_4(O) = +ng\vec{j} \wedge x\vec{y} = ngx\sin\alpha\,\vec{k}$$

Finalement

$$\mathcal{T}_{eff}(OA_1) = \begin{bmatrix} \vec{R}_0 + T_1\vec{i} + (N_1 - mg)\vec{j} \\ l\left(\frac{m}{2}g\cos\alpha + T_1\sin\alpha - N_1\cos\alpha\right)\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

$$\mathcal{T}_{eff}(OA_2) = \begin{bmatrix} -\vec{R}_0 + T_2\vec{i} + (N_2 - mg - ng)\vec{j} \\ \left(ngx\sin\alpha - \frac{ml}{2}g\sin\alpha + lT_2\cos\alpha + lN_2\sin\alpha\right)\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \vec{R}_0 + T_1\vec{i} + (N_1 - mg)\vec{j} = 0 \\ \frac{m}{2}g\cos\alpha + T_1\sin\alpha - N_1\cos\alpha = 0 \\ -\vec{R}_0 + T_2\vec{i} + (N_2 - mg - ng)\vec{j} = 0 \\ ngx\sin\alpha - \frac{ml}{2}g\sin\alpha + lT_2\cos\alpha + lN_2\sin\alpha = 0 \end{array} \right.$$

on a perdu l'équivalence en se désintéressant de $\vec{R}_0$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Rightarrow \left\| \begin{array}{ll} T_1 + T_2 = 0 & (1) \\ N_1 + N_2 = 2mg + ng & (2) \\ N_1\cos\alpha - T_1\sin\alpha = \frac{m}{2}g\cos\alpha & (3) \\ N_2\sin\alpha + T_2\cos\alpha = \frac{m}{2}g\sin\alpha - ng\frac{x}{l}\sin\alpha & (4) \end{array} \right.$$

$(1) \Rightarrow T_2 = -T_1$ $\qquad$ $(2) \Rightarrow N_2 = (2m + n)g - N_1$

$$(3) \Rightarrow T_1 = N_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{m}{2}g\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$(4) \Rightarrow (2m+M)g\sin\alpha - N_1\sin\alpha - N_1\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{m}{2}g\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{m}{2}g\sin\alpha - Mg\dfrac{x}{e}\sin\alpha$

$$N_1 = (2m+M)g\sin^2\alpha + \frac{m}{2}g\cos^2\alpha - \frac{m}{2}g\sin^2\alpha + Mg\frac{x}{e}\sin^2\alpha$$

$$N_1 = \frac{m}{\cancel{2}}g + \left(M + \frac{m}{2} + M\frac{x}{e}\right)g\sin^2\alpha$$

on déduit alors

$$N_1 = mg + \left(M + \frac{m}{2} + M\frac{x}{e}\right)g\sin^2\alpha$$

$$N_2 = (M+m)g - \left(M + \frac{m}{2} + M\frac{x}{e}\right)g\sin^2\alpha$$

$$T_1 = \frac{m}{2}g\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cancel{4} + \left(M + \frac{m}{2} + \frac{Mx}{e}\right)g\cos\alpha\sin\alpha$$

$$T_2 = -\frac{m}{2}g\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \left(M + \frac{m}{2} + \frac{Mx}{e}\right)g\cos\alpha\sin\alpha$$

La loi de Coulomb stipule que $|T_i| < f N_i$ $(i=1,2)$
soit

$$\frac{|T_i|}{N_i} < f$$

Le pied susceptible de glisser le premier est celui pour lequel le rapport $\dfrac{|T_i|}{N_i}$ est le plus grand

$$\frac{|T_1|}{N_1} - \frac{|T_2|}{N_2} = |T_1|\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right) = |T_1|\left(\frac{N_2 - N_1}{N_1 N_2}\right)$$

Etudier le signe de $\dfrac{|T_1|}{N_1} - \dfrac{|T_2|}{N_2}$ revient à étudier celui de $N_2 - N_1$

$$N_2 - N_1 = Mg - 2\left(M + \frac{m}{2} + \frac{Mx}{e}\right)g\sin^2\alpha$$

Exercice 3

Relativement au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (avec $\vec{j}$ vertical ascendant : $\vec{g} = -g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur on considère un système Σ situé dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. Σ est constitué de deux solides homogènes :

- Un disque $\mathcal{D}$ de masse m, de rayon R et de centre C.
- Une tige $\mathcal{T}$ de masse M et de longueur ℓ.

$\mathcal{D}$ est astreint à rester en contact en un point I de l'axe $O\vec{i}$. On note $T\vec{i}+N\vec{j}$ la réaction du sol au point I

$\mathcal{T}$ est astreint à rester en contact en un point A de l'axe $O\vec{i}$. On note $Q\vec{i}+P\vec{j}$ la réaction du sol au point A

Les deux solides $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ restent en contact en un point J. On introduit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AJ} = x\vec{u}$ $(x > 0)$ et $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ soit une base orthonormée directe. On note α l'angle $(\vec{i},\vec{u})$ mesuré autour de $\vec{k}$ et on pose $G\vec{u}+F\vec{v}$ la réaction du disque sur la tige au point J. On suppose que $\alpha \in]0,\frac{\pi}{2}[$

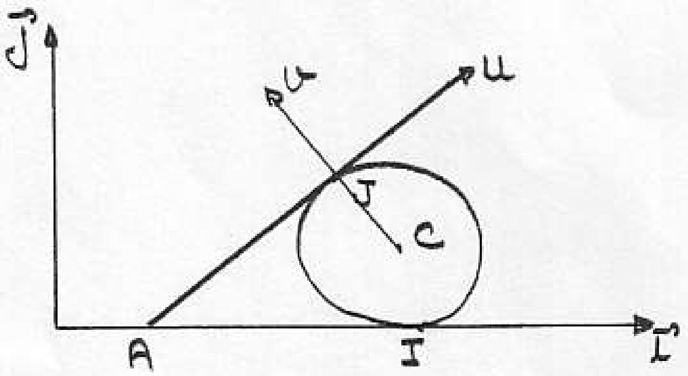
On suppose que les différents contacts ponctuels aux points I, J et A obéissent à une loi de Coulomb de même coefficient f

1. Montrer que $x = \dfrac{R(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$
2. Rappeler la condition d'équilibre d'un système de solides
3. Ecrire les équations d'équilibre de Σ. En déduire que $F = \dfrac{M\ell}{2x}g\cos\alpha$. Exprimer N, P, T, Q et G en fonction de F et de α.
4. Vérifier que le disque reste toujours en contact avec le sol au point I et avec la tige au point J. On suppose maintenant que $\ell = 4\sqrt{3}\,R$. Montrer que si $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ la tige va décoller du sol au point A.
5. On a toujours $\ell = 4\sqrt{3}\,R$ mais cette fois çi $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Calculer F, N, P, T, Q et G. Montrer que $P < F < N$. En déduire que le point A risque de glisser le premier mais qu'aucun glissement ne pourra apparaître si $f > \dfrac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$.

Mécanique statique

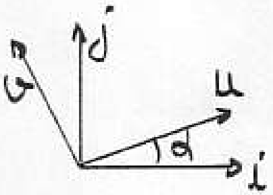
Q21 Juin 2001

I. Etude d'un équilibre



D : masse m, rayon R

T : masse M, longueur l



$\vec{AJ} = x\vec{u}$ $x > 0$

$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

1. Relation entre x et α

$\vec{AI} = \vec{AJ} + \vec{JC} + \vec{CI} = x\vec{u} - R\vec{v} - R\vec{j}$

la condition $\vec{AI}\cdot\vec{j} = 0$ implique $x\sin\alpha - R\cos\alpha - R = 0$

soit finalement $\boxed{x = \dfrac{R(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}}$

2. Condition d'équilibre d'un système

Un système est en équilibre ssi chaque solide du système est en équilibre

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \mathcal{T}_{eff}(D) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(T) = 0 \end{array} \right.$$

3. Equations d'équilibre

* $\mathcal{T}_{eff}(D) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} T\vec{i} + N\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} -G\vec{u} - F\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_J$

$$\mathcal{T}_{eff}(D) = \begin{bmatrix} (T - G\cos\alpha + F\sin\alpha)\vec{i} + (N - mg - G\sin\alpha - F\cos\alpha)\vec{j} \\ R(T+G)\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

* $\mathcal{T}_{eff}(T) = \begin{bmatrix} -Mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} Q\vec{i} + P\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} G\vec{u} + F\vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}_J$

$\cdot\ -Mg\vec{j} \wedge \vec{GA} = +Mg\vec{j} \wedge \frac{\ell}{2}\vec{u} = -\frac{M\ell}{2} g\cos\alpha\,\vec{k}$

$\cdot\ (G\vec{u} + F\vec{v}) \wedge \vec{JA} = (G\vec{u} + F\vec{v}) \wedge (-x\vec{u}) = Fx\vec{k}$

$$\mathcal{T}_{eff}(T) = \begin{bmatrix} (Q + G\cos\alpha - F\sin\alpha)\vec{i} + (P - Mg + G\sin\alpha + F\cos\alpha)\vec{j} \\ (Fx - \frac{M\ell}{2} g\cos\alpha)\vec{k} \end{bmatrix}_A$$

En écrivant les équations $\mathcal{T}_{eff}(D) = \mathcal{T}_{eff}(T) = 0$, il vient :

$$\left\| \begin{array}{l} T - G\cos\alpha + F\sin\alpha = 0 \\ N - G\sin\alpha - F\cos\alpha = mg \\ T + G = 0 \\ Q + G\cos\alpha - F\sin\alpha = 0 \\ P + G\sin\alpha + F\cos\alpha = Mg \\ Fx - \frac{M\ell}{2} g\cos\alpha = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} F = \frac{M\ell}{2x} g\cos\alpha \\ T = -F\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\ G = Q = F\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\ N = F + mg \\ P = Mg - F \end{array} \right.$$

4- <u>On suppose $\ell = 4\sqrt{3}R$ - contact unilatéral</u>

$\frac{\ell}{2x} = \frac{\ell\sin\alpha}{2R(1+\cos\alpha)} = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

on en déduit ensuite

$*\ F = 2\sqrt{3}\,Mg\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha} > 0 \quad \forall\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

A l'équilibre, le contact ne peut être rompu entre le disque et la tige

$*\ N = F + mg > 0 \quad \forall\alpha$ pas de perte de contact en I

$*\ P = Mg - F = Mg\left(1 - 2\sqrt{3}\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$

si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $\quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ et $1+\cos\alpha = \frac{3}{2}$

$P = Mg\left(1 - \frac{3}{2} * \frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow$ la tige perd le contact avec le sol au point A si $\alpha = \pi/3$

5. Loi de Coulomb $\quad l = 4\sqrt{3}\,R \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$* \; F = 2\sqrt{3}\, mg \, \frac{\frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3mg}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow F = 3(2-\sqrt{3})\, mg$$

$$* \; N = mg + F$$

$$* \; P = mg - F = mg(1 - 6 + 3\sqrt{3}) \Rightarrow P = mg\,(3\sqrt{3} - 5)$$

$$* \; |T| = |Q| = |G| = F\,\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = F * \frac{1/2}{1+\sqrt{3}/2} = \frac{F}{2+\sqrt{3}} = 3(2-\sqrt{3})^2\, mg$$

on a alors $\quad P < F < N$

comme ici $|T| = |Q| = |G|$ on aura $\frac{|T|}{N} < \frac{|G|}{F} < \frac{|Q|}{P}$

or la loi de Coulomb implique que si il n'y a pas de glissement $\frac{|\text{Tangent}|}{\text{Normal}} < f$

c'est donc le point A qui est susceptible de glisser le premier. On évitera tout glissement si $|Q| < fP$

soit

$$3(2-\sqrt{3})^2\, mg < mfg\,(3\sqrt{3}-5) \Rightarrow f > \frac{3(2-\sqrt{3})^2}{3\sqrt{3}-5}$$

$$f > \frac{3(2-\sqrt{3})^2(3\sqrt{3}+5)}{27-25} = \frac{3}{2}(4+3-4\sqrt{3})(3\sqrt{3}+5)$$

$$f > \frac{3}{2}(35 - 36 + 21\sqrt{3} - 20\sqrt{3}) = \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$$

si $f > \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$ aucun glissement n'apparaitra ni au point A ni ailleurs.

Exercice 4

Dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec $O\vec{j}$ vertical ascendant, $\vec{g} = g\vec{j}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère un système Σ constitué de deux barres S_1 et S_2 homogènes de même masse m et de même longueur ℓ.

S_1 est d'extrémités O et A. On peut introduire $\vec{u}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{OA} = \ell\vec{u}$ et on note θ l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{u}$, (cf figure 1), on suppose $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

S_2 est d'extrémités A et B. On peut introduire $\vec{Y}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{BA} = \ell\vec{Y}$.

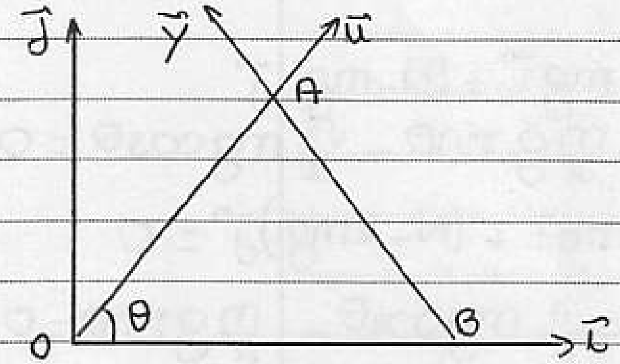
La liaison entre S_1 et le bâti fixe modélisé par le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une liaison pivot parfaite d'axe $O\vec{k}$.

Les deux barres sont articulées au point A par une liaison pivot parfaite d'axe $A\vec{k}$.

Le point B est astreint à rester en contact **sans frottement** avec l'axe $O\vec{i}$.

De plus, on exerce sur la barre S_2, au point B une force $-\frac{\sqrt{3}}{2}mg\,\vec{i}$.

Ecrire les torseurs des efforts qui s'exercent sur S_2 et sur Σ. En déduire la position d'équilibre de Σ.



$$\mathcal{T}_{eff}(S_2) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_2} + \begin{bmatrix} \vec{R}_a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

système ds le plan — pas de frott^t

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_1} + \begin{bmatrix} \vec{R}_0 \\ 0 \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_{G_2} + \begin{bmatrix} N\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

On exprime $\mathcal{T}_{eff}(S_2)$ au point A (à cause de la liaison pivot) et $\mathcal{T}_{eff}(\Sigma)$ au point O (pour la même raison).

$\mathcal{M}_1(A) = -mg\vec{j} \wedge \overrightarrow{G_2A} = -mg\vec{j} \wedge \frac{\ell}{2}\vec{Y} = -\frac{m\ell}{2}g\sin\theta\,\vec{k}$

$\mathcal{M}_2(A) = 0$

$\mathcal{M}_3(A) = N\vec{j} \wedge \overrightarrow{BA} = N\vec{j} \wedge \ell\vec{Y} = \ell N\sin\theta\,\vec{k}$

$\mathcal{M}_4(A) = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} \wedge \overrightarrow{BA} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} \wedge \ell\vec{Y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}m\ell g\cos\theta\,\vec{k}$

$$\mathcal{T}_{eff}(S_2) = \begin{bmatrix} \vec{R}_a - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} + (N - mg)\vec{j} \\ \ell\left(N\sin\theta - \frac{m}{2}g\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\cos\theta\right)\vec{k} \end{bmatrix}_A$$

$$\mathcal{M}'_1(O) = -mg\vec{j}\wedge\vec{G_1O} = mg\vec{j}\wedge\frac{\ell}{2}\vec{u} = -\frac{m\ell}{2}g\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\mathcal{M}'_2(O) = 0$$

$$\mathcal{M}'_3(O) = -mg\vec{j}\wedge\vec{G_2O} = -mg\vec{j}\wedge(\vec{G_2A}+\vec{AO}) = -mg\vec{j}\wedge\frac{\ell}{2}(\vec{y}-2\vec{u})$$

$$\mathcal{M}'_3(O) = -\frac{m\ell}{2}g\,(\sin\theta + 2\cos\theta)\vec{k}$$

$$\mathcal{M}'_4(O) = (N\vec{j}-\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i})\wedge\vec{BO} = -(N\vec{j}-\frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i})\wedge 2\ell\cos\theta\,\vec{i}$$

$$\mathcal{M}'_4(O) = 2\ell N\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} \vec{R_0} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} + (N-2mg)\vec{j} \\ \ell(2N\cos\theta - \frac{m}{2}g\cos\theta - \frac{m}{2}g\sin\theta - mg\cos\theta)\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \vec{R_a} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} + (N-mg)\vec{j} \\ N\sin\theta - \frac{m}{2}g\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\cos\theta = 0 \\ \vec{R_0} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{i} + (N-2mg)\vec{j} = 0 \\ 2N\cos\theta - \frac{3}{2}mg\cos\theta - \frac{m}{2}g\sin\theta = 0 \end{array}\right.$$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} N\sin\theta = \frac{mg}{2}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) & (1) \\ 2N\cos\theta = \frac{mg}{4}(3\cos\theta + \sin\theta) & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Rightarrow N = \frac{mg}{2}\left(1 + \sqrt{3}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{mg}{2}\left(\cos\theta + \sqrt{3}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{mg}{4}(3\cos\theta + \sin\theta)$$

$$2\cos\theta + 2\sqrt{3}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = 3\cos\theta + \sin\theta$$

$$2\sqrt{3}\cos^2\theta = \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta$$

$$(2\sqrt{3}+1)\cos^2\theta = 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta \Rightarrow \text{devrait donner } \theta$$

après on réinjecte dans l'expression de N

Exercice 5

On étudie l'équilibre d'un système Σ formé de deux solides $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$. Le solide $\mathcal{D}$ est un disque plan homogène de rayon R, de centre C, et de masse m. Le solide $\mathcal{B}$ est une barre homogène de longueur ℓ, d'extrémités C et A et de même masse m. L'ensemble est placé dans un repère galiléen $R_o = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et est soumis à la gravité $-g\vec{j}$

Le disque et la barre sont en liaison pivot parfaite d'axe $C\vec{k}$.

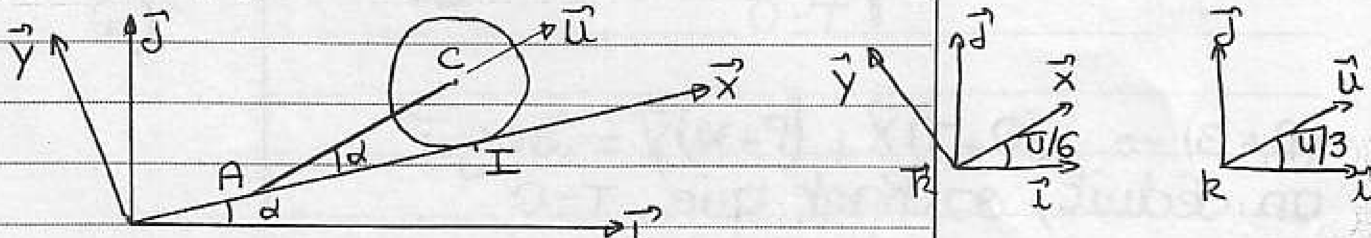
Le disque $\mathcal{D}$ est astreint à rester sur un axe $O\vec{X}$ incliné d'un angle $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ avec l'horizontale $O\vec{i}$. On introduit $\vec{Y}$ le vecteur tel que $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{k})$ soit orthonormée directe. De plus, on note θ l'angle entre l'axe $O\vec{i}$ et un rayon du disque $\mathcal{D}$.

L'extrémité A de la barre $\mathcal{B}$ se trouve sur l'axe $O\vec{X}$.

La position de A est repérée par la donnée du vecteur $\overrightarrow{OA} = x\vec{X}$.
On introduit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AC} = \ell\vec{u}$ et on suppose que l'axe $A\vec{u}$ fait un angle $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ avec l'horizontale $O\vec{i}$.

On note $Q\vec{X} + P\vec{Y}$ la réaction du sol sur la barre au point A et $T\vec{X} + N\vec{Y}$ la réaction du sol sur le disque au point I. On suppose que ces contacts suivent une loi de Coulomb de même coefficient f.

1. Exprimer au point C le torseur des efforts qui s'exercent sur la barre $\mathcal{B}$ et sur le disque $\mathcal{D}$.
2. Déterminer P, Q, N et T lorsque le système est à l'équilibre.



$$\mathcal{T}eff(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} Q\vec{X} + P\vec{Y} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} \vec{R_c} \\ \vec{m}(C) \end{bmatrix}_C \quad \text{avec } \vec{m}(C).\vec{k} = 0$$

En fait $\vec{m}(C) = 0$ car dans le cas d'un système situé dans le plan une liaison pivot se conduit comme une liaison rotule

$$\vec{m}_1(C) = \vec{m}_1(G) + \vec{R_1} \wedge \vec{GC} = -mg\vec{j} \wedge \frac{\ell}{2}\vec{u} = \frac{m\ell}{2} g \cos\frac{\pi}{3}\vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{4} m\ell g\vec{k}$$

$$\vec{m}_2(C) = (Q\vec{X} + P\vec{Y}) \wedge \vec{AC} = (Q\vec{X} + P\vec{Y}) \wedge \ell\vec{u} = \ell\left(Q \sin\frac{\pi}{6} - P\cos\frac{\pi}{6}\right)\vec{k}$$

$$\vec{m}_2(C) = \frac{\ell}{2}(Q - \sqrt{3}P)\vec{k}$$

$$\mathcal{T}eff(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \vec{R_c} + Q\vec{X} + P\vec{Y} - mg\vec{J} \\ \frac{\ell}{4}(\sqrt{3}mg + 2Q - 2\sqrt{3}P)\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} -mg\vec{J} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} T\vec{X}+N\vec{Y} \\ 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} -\vec{R_C} \\ -\vec{m}(C) \end{bmatrix}_C$$

$\vec{m}(C).\vec{k} = 0$
$\vec{m}(C) = 0$

$$m_2(C) = (T\vec{X}+N\vec{Y}) \wedge \vec{IC} = (T\vec{X}+N\vec{Y}) \wedge R\vec{Y} = RT\vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} -\vec{R_C} + T\vec{X} + N\vec{Y} - mg\vec{J} \\ RT\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(\mathcal{D}) = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{ll} \vec{R_C} + Q\vec{X} + P\vec{Y} - mg\vec{J} = 0 & (1) \\ 2Q - 2\sqrt{3}P = -\sqrt{3}mg & (2) \\ -\vec{R_C} + T\vec{X} + N\vec{Y} - mg\vec{J} = 0 & (3) \\ T = 0 & (4) \end{array} \right.$$

$(1)+(3) \Rightarrow (Q+T)\vec{X} + (P+N)\vec{Y} = 2mg\vec{J}$

on déduit, sachant que $T=0$

$$\begin{cases} Q = 2mg\sin\frac{\pi}{6} = mg \\ P+N = 2mg\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}mg \end{cases}$$

Il s'agit alors de résoudre le système

$$\left\| \begin{array}{l} T = 0 \\ Q = mg \\ 2Q - 2\sqrt{3}P = -\sqrt{3}mg \\ P+N = \sqrt{3}mg \end{array} \right.$$

$(3) \Rightarrow 2\sqrt{3}P = (2+\sqrt{3})mg \Rightarrow P = \frac{2\sqrt{3}+3}{6}mg$

$N = \sqrt{3}mg - P = \frac{mg}{6}(6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3) = \frac{mg}{6}(4\sqrt{3}-3)$

Le disque et la barre sont en liaison pivot parfaite d'axe $C\vec{k}$.

Le disque $\mathcal{D}$ est astreint à rester sur un axe $O\vec{X}$ incliné d'un angle $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ avec l'horizontale $O\vec{\imath}$. On introduit $\vec{Y}$ le vecteur tel que $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{k})$ soit orthonormée directe. De plus, on note θ l'angle entre l'axe $O\vec{\imath}$ et un rayon du disque $\mathcal{D}$.

L'extrémité A de la barre $\mathcal{B}$ se trouve sur l'axe $O\vec{X}$.

La position de A est repérée par la donnée du vecteur $\overrightarrow{OA} = x\vec{X}$.
On introduit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AC} = \ell\vec{u}$ et on suppose que l'axe $A\vec{u}$ fait un angle $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ avec l'horizontale $O\vec{\imath}$.
On note $Q\vec{X} + P\vec{Y}$ la réaction du sol sur la barre au point A et $T\vec{X} + N\vec{Y}$ la réaction du sol sur le disque au point I. On suppose que ces contacts suivent une loi de Coulomb de même coefficient f.
1. Exprimer au point C le torseur des efforts qui s'exercent sur la barre $\mathcal{B}$ et sur le disque $\mathcal{D}$.
2. Déterminer P, Q, N et T lorsque le système est à l'équilibre.

Exercice 6

Relativement au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (avec $\vec{\jmath}$ vertical ascendant), $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ désigne l'accélération de la pesanteur on considère un système Σ situé dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Σ est constitué de trois solides homogènes :
- Une barre $\mathcal{B}_1$ de masse M_1, d'extrémités O et O_1, de centre A et de longueur ℓ.
- Une barre $\mathcal{B}_2$ de masse M_2, d'extrémités O et O_2, de centre B et de longueur L.
- Une barre $\mathcal{B}_3$ de masse M_3, d'extrémités C et C' et de centre G.

On note $\vec{u}$ et $\vec{Y}$ les vecteurs unitaires tels que : $\overrightarrow{AO} = \dfrac{\ell}{2}\vec{Y}$ $\quad \overrightarrow{BO} = \dfrac{L}{2}\vec{u}$ et $\quad \overrightarrow{CO} = x\,\vec{u}$.

On introduit α l'angle $(\vec{\imath}, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{k}$ et β l'angle $(\vec{\jmath}, \vec{Y})$ mesuré autour de $\vec{k}$.
On suppose que α et β sont compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

Les liaisons entre le bati fixe modélisé par $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et les barres $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des liaisons pivots parfaites d'axe $O\vec{k}$.
La barre $\mathcal{B}_3$ est astreinte à rester verticale (parallèle à $\vec{\jmath}$). Les barres $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont en contact au point C et sont en liaison glissière parfaite d'axe $C\vec{u}$.
La barre $\mathcal{B}_2$ exerce sur la barre $\mathcal{B}_1$ un couple $\dfrac{M_1}{4}\,\ell g\,\vec{k}$ et un intervenant extérieur exerce au point C sur la barre $\mathcal{B}_3$ une force $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,M_3\,g\,\vec{u}$
1. Rappeler la condition d'équilibre d'un solide.
2. Rappeler la condition d'équilibre d'un système de solides.
3. Ecrire au point O le torseur des efforts qui s'exercent sur $\mathcal{B}_1$, au point C le torseur des efforts qui s'exercent sur $\mathcal{B}_3$ et au point O le torseur des efforts qui s'exercent sur le système complet $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$
4. En déduire les équations d'équilibre du système. Déterminer à l'équilibre la valeur des angles α et β ainsi que la position du point C.

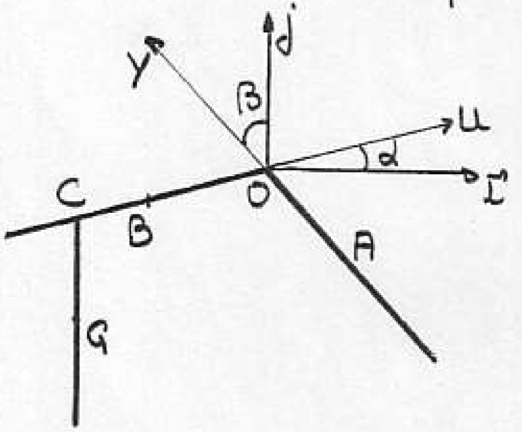
Exercice 6

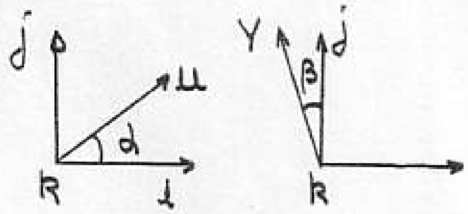
Mécanique statique
Q21 Juin 2003

I. Etude d'un équilibre

1. Un solide est en équilibre lorsque le torseur des efforts exercés sur ce solide est nul.

2. Un système de solides est en équilibre lorsque chaque solide de ce système est en équilibre





3. Torseur des efforts

. $\mathcal{T}_{eff}(B_1) = \begin{bmatrix} -m_1 g\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathcal{M}_1(O) \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_1}{4} lg\vec{k} \end{bmatrix}_\forall$ avec $\mathcal{M}_1(O).\vec{k} = 0$

Pour exprimer le torseur des efforts qui s'exercent sur B_1 au point O, on utilise la relation sur les moments

$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + R \wedge \vec{AB}$

En ce qui concerne $\mathcal{T}_{eff}(B_1)$ cette opération ne concerne que l'action de la pesanteur, il vient :

$\mathcal{M}_{pes}(O) = -m_1 g\vec{j} \wedge \vec{AO} = -m_1 g\vec{j} \wedge \frac{l}{2}\vec{y} = -\frac{m_1}{2} lg \sin\beta\, \vec{k}$

$\mathcal{T}_{eff}(B_1) = \begin{bmatrix} R_1 - m_1 g\vec{j} \\ \mathcal{M}_1(O) + \frac{m_1}{4} lg(1 - 2\sin\beta)\vec{k} \end{bmatrix}_O$ avec $\mathcal{M}_1(O).\vec{k} = 0$

. $\mathcal{T}_{eff}(B_3) = \begin{bmatrix} -m_3 g\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} \vec{R_3} \\ \mathcal{M}_3(C) \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_C$ avec $\vec{R_3}.\vec{u} = 0$

$-m_3 g\vec{j} \wedge \vec{GC} = 0$ car $\vec{GC} \parallel \vec{j}$

$$\mathcal{T}_{eff}(B_3) = \begin{bmatrix} R_3 - m_3 g\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} \\ \mathcal{M}_3(C) \end{bmatrix}_C \quad \text{avec } R_3 . \vec{u} = 0$$

$$.\ \mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} -m_1 g\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} -m_2 g\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} m_3 g\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathcal{M}_1(O) \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} R_2 \\ \mathcal{M}_2(O) \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

$$-m_1 g\vec{j} \wedge \vec{AO} = -\frac{m_1}{2} lg \sin\beta \vec{k}$$
$$-m_2 g\vec{j} \wedge \vec{BO} = -m_2 g\vec{j} \wedge \frac{L}{2}\vec{u} = \frac{m_2}{2} Lg\cos\alpha \vec{k}$$
$$-m_3 g\vec{j} \wedge \vec{GO} = -m_3 g\vec{j} \wedge (\vec{GC} + x\vec{u}) = m_3 x g \cos\alpha \vec{k}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} \wedge \vec{CO} = \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} \wedge x\vec{u} = 0$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} - (m_1 + m_2 + m_3) g\vec{j} \\ \mathcal{M}_1(O) + \mathcal{M}_2(O) + (-m_1 l\sin\beta + m_2 L\cos\alpha + 2m_3 x\cos\alpha)\frac{g}{2}\vec{k} \end{bmatrix}_O$$

4. Equations d'équilibre

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \mathcal{T}_{eff}(B_1) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(B_2) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(B_3) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \mathcal{T}_{eff}(B_1) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(B_3) = 0 \\ \mathcal{T}_{eff}(\Sigma) = 0 \end{array} \right.$$

Pour que le système Σ soit en équilibre, il faut que les équations suivantes soient satisfaites

$$\left\| \begin{array}{ll} (1) & R_1 - m_1 g\vec{j} = 0 \\ (2) & \mathcal{M}_1(O) + \frac{m_1}{4} lg(1 - 2\sin\beta)\vec{k} = 0 \quad \text{avec } \mathcal{M}_1(O).k = 0 \\ (3) & R_3 - m_3 g\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} = 0 \quad \text{avec } R_3 . \vec{u} = 0 \\ (4) & \mathcal{M}_3(C) = 0 \\ (5) & R_1 + R_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g\vec{u} - (m_1 + m_2 + m_3) g\vec{j} = 0 \\ (6) & \mathcal{M}_1(O) + \mathcal{M}_2(O) + (-m_1 l\sin\beta + m_2 L\cos\alpha + 2m_3 x\cos\alpha)\frac{g}{2}\vec{k} = 0 \end{array} \right.$$

On projette (2) suivant $\vec{k}$, il vient $\sin\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$

On projette (3) suivant $\vec{u}$ et on déduit :

$$-m_3 g \sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ et } \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Si on tient compte de ces résultats et qu'on exprime la $6^{ème}$ équation dans la direction $\vec{k}$ on a :

$$-m_1 \ell \sin\beta + m_2 L \cos\alpha + 2m_3 x \cos\alpha = 0$$

$$-m_1 \ell + m_2 L + 2m_3 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m_1 \ell - m_2 L}{2m_3}$$

5. Condition de compatibilité

L'équilibre de (Σ) repose (en partie) sur le fait que les barres B_1 et B_3 sont en contact au point C, par conséquent $\quad 0 \leq x \leq L$

$$0 \leq \frac{m_1 \ell - m_2 L}{2m_3} \leq L \Rightarrow 0 \leq m_1 \ell - m_2 L \leq 2m_3 L \Rightarrow \boxed{m_2 \frac{L}{\ell} \leq m_1 \leq (2m_3 + m_2)\frac{L}{\ell}}$$