Exercice 3

Dans le repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le champ de vecteurs défini en tout point P de l'espace par : $\vec{u}(P) = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AP}$ où A est un point fixé de l'espace. Montrer que le champ $\vec{u}$ défini un torseur dont on déterminera la résultante et l'axe central.

Si $\vec{u}(P) = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AP}$ définit un torseur on doit pouvoir établir l'existence d'un unique vecteur $\vec{R}$,

$\forall (P, Q) \quad \vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$

$$\begin{aligned}
\vec{u}(Q) = \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{AQ} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) \wedge (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ}) \\
&= \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PQ} \\
&= \vec{u}(P) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{AP}) \wedge \overrightarrow{PQ} \\
&= \vec{u}(P) + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{PQ}
\end{aligned}$$

Si on pose $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$ alors $\vec{R}$ est bien déterminée de manière unique et la relation sur les torseurs est satisfaite

Remarque. $\vec{u}(O) = \vec{u}(A) = 0 \Rightarrow \vec{u}$ est un glisseur

Dans ce cas $\Delta = \{P ; \vec{u}(P) = 0\}$

$$\Delta = \{P ; \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA}\}$$