Exercice 5

On étudie l'équilibre d'un système Σ formé de deux solides $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$. Le solide $\mathcal{D}$ est un disque plan homogène de rayon R, de centre C, et de masse m. Le solide $\mathcal{B}$ est une barre homogène de longueur ℓ, d'extrémités C et A et de même masse m. L'ensemble est placé dans un repère galiléen $R_o = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et est soumis à la gravité $-g\vec{j}$

Le disque et la barre sont en liaison pivot parfaite d'axe $C\vec{k}$.

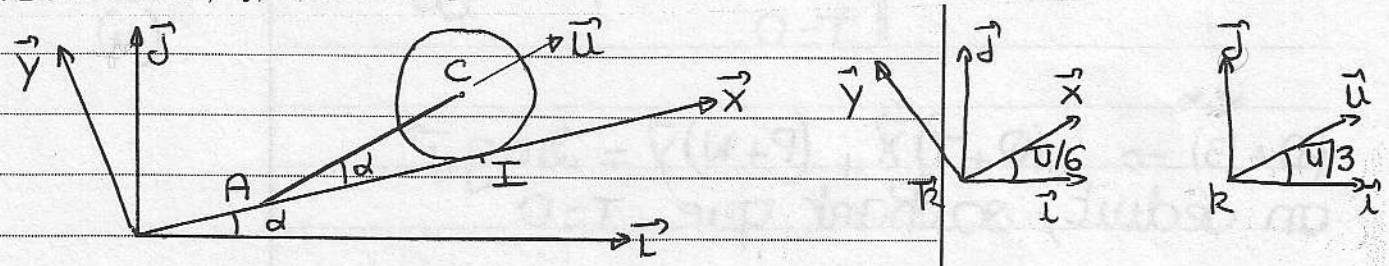
Le disque $\mathcal{D}$ est astreint à rester sur un axe $O\vec{X}$ incliné d'un angle $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ avec l'horizontale $O\vec{i}$. On introduit $\vec{Y}$ le vecteur tel que $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{k})$ soit orthonormée directe. De plus, on note θ l'angle entre l'axe $O\vec{i}$ et un rayon du disque $\mathcal{D}$.

L'extrémité A de la barre $\mathcal{B}$ se trouve sur l'axe $O\vec{X}$.

La position de A est repérée par la donnée du vecteur $\overrightarrow{OA} = x\vec{X}$.
On introduit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AC} = \ell\vec{u}$ et on suppose que l'axe $A\vec{u}$ fait un angle $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ avec l'horizontale $O\vec{i}$.

On note $Q\vec{X} + P\vec{Y}$ la réaction du sol sur la barre au point A et $T\vec{X} + N\vec{Y}$ la réaction du sol sur le disque au point I. On suppose que ces contacts suivent une loi de Coulomb de même coefficient f.

1. Exprimer au point C le torseur des efforts qui s'exercent sur la barre $\mathcal{B}$ et sur le disque $\mathcal{D}$.
2. Déterminer P, Q, N et T lorsque le système est à l'équilibre.



$$\mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} Q\vec{X} + P\vec{Y} \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} \vec{R}_c \\ \vec{m}(C) \end{bmatrix}_C \quad \text{avec } \vec{m}(C).\vec{k} = 0$$

En fait $\vec{m}(C) = 0$ car dans le cas d'un système situé dans le plan une liaison pivot se conduit comme une liaison rotule

$$\vec{m}_1(C) = \vec{m}_1(G) + \vec{R}_1 \wedge \vec{GC} = -mg\vec{j} \wedge \frac{\ell}{2}\vec{u} = \frac{m\ell}{2} g \cos\frac{\pi}{3}\vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{4} mg\vec{k}$$

$$\vec{m}_2(C) = (Q\vec{X} + P\vec{Y}) \wedge \vec{AC} = (Q\vec{X} + P\vec{Y}) \wedge \ell\vec{u} = \ell\left(Q\sin\frac{\pi}{6} - P\cos\frac{\pi}{6}\right)\vec{k}$$

$$\vec{m}_2(C) = \frac{\ell}{2}(Q - \sqrt{3}P)\vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{eff}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \vec{R}_c + Q\vec{X} + P\vec{Y} - mg\vec{j} \\ \frac{\ell}{4}(\sqrt{3}mg + 2Q - 2\sqrt{3}P)\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

$$\mathcal{T}eff(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} -mg\vec{j} \\ 0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} T\vec{X}+N\vec{Y} \\ 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} -\vec{R_c} \\ -\vec{m}(C) \end{bmatrix}_C$$

$\vec{m}(C).\vec{k} = 0$

$\vec{m}(C) = \vec{0}$

$$m_2(C) = (T\vec{X}+N\vec{Y}) \wedge \vec{IC} = (T\vec{X}+N\vec{Y}) \wedge R\vec{Y} = RT\vec{k}$$

$$\mathcal{T}eff(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} -\vec{R_c} + T\vec{X} + N\vec{Y} - mg\vec{j} \\ RT\vec{k} \end{bmatrix}_C$$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}eff(\mathcal{B}) = 0 \\ \mathcal{T}eff(\mathcal{D}) = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma \text{ équilibre} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} \vec{R_c} + Q\vec{X} + P\vec{Y} - mg\vec{j} = 0 & (1) \\ 2Q - 2\sqrt{3}P = \sqrt{3}mg & (2) \\ -\vec{R_c} + T\vec{X} + N\vec{Y} - mg\vec{j} = 0 & (3) \\ T = 0 & (4) \end{array} \right.$$

$$(1)+(3) \Rightarrow (Q+T)\vec{X} + (P+N)\vec{Y} = 2mg\vec{j}$$

on déduit, sachant que $T=0$

$$\begin{cases} Q = 2mg\sin\frac{\pi}{6} = mg \\ P+N = 2mg\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}mg \end{cases}$$

Il s'agit alors de résoudre le système

$$\left\| \begin{array}{l} T = 0 \\ Q = mg \\ 2Q - 2\sqrt{3}P = -\sqrt{3}mg \\ P+N = \sqrt{3}mg \end{array} \right.$$

$$(3) \Rightarrow 2\sqrt{3}P = (2+\sqrt{3})mg \Rightarrow P = \frac{2\sqrt{3}+3}{6}mg$$

$$N = \sqrt{3}mg - P = \frac{mg}{6}(6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3) = \frac{mg}{6}(4\sqrt{3} - 3)$$