II. Torseurs

Exercice 1

Relativement au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère 3 points O(0,0,0) , A(2,0,1), B(1,-1,0)

On se donne un champ équiprojectif $\vec{u}$ tel que $\vec{u}(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u}(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$

1. Calculer la résultante et l'axe central de $\vec{u}$.
2. Déterminer analytiquement $\vec{u}(M) \quad \forall M(x,y,z)$

1. Résultante . Axe central

$\vec{u}$ est un champ équiprojectif $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ définit un torseur alors $\forall P, Q \in \mathcal{E} \quad \exists! \vec{R} \; ; \; \vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ}$

on note $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{R}$

Si la relation ci dessus est vraie $\forall P, Q \in \mathcal{E}$ elle le sera en particulier pour les points O, A et B

$\vec{u}(A) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OA}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} q = 0 \\ 2r - p = -4 \\ -2q = 0 \end{array} \right.$$

Ce système ne permet pas de déterminer parfaitement la résultante

La résultante d'un torseur est <u>unique</u> il serait donc tout à fait exotique et mal venu de choisir $r = 0$ et $p = 4$ ou $r = -2$ et $p = 0$ ou tout autre possibilité aléatoire

Il faut 3 points non alignés pour déterminer un torseur

On va donc exploiter le point B.

$\vec{u}(B) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OB}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} r = -2 \\ \alpha = -p - q \end{array} \right.$$

On déduit finalement $\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\alpha = 0$

axe central $\Delta = \{P \in \mathcal{E} \, ; \, \vec{R} \wedge \vec{u}(P) = 0\}$ par définition

On peut remarquer qu'ici $\vec{R} \cdot \vec{u}(O) = 0$

L'invariant scalaire est nul $\Rightarrow$ ce torseur est un glisseur

Dans le cas d'un glisseur $\Delta = \{P \in \mathcal{E} \, ; \, \vec{u}(P) = 0\}$

$$\vec{u}(P) = \vec{u}(O) + R \wedge \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}(P) = \begin{pmatrix} 1+2y \\ 2-2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}(P) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \Delta = \left\{P \in \mathcal{E} \, ; \, \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ z \end{pmatrix} \, z \in \mathbb{R}\right\}$$

<u>Rem</u> : on retrouve bien $\Delta \, // \, \vec{R}$